GEOMETRÍA

8 PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS

B Q F P M E A C

Si el $\triangle ABC$ es equilátero y el $\triangle APQC$ es circunscrito, se cumple: $\boxed{EM=MF}$

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos
300 Problemas Propuestos

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Autor : Julio César Orihuela Bastidas

© **Titular de la obra:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

Diseño y diagramación: Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

© **Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Página web: www.editorialcuzcano.com.pe

Primera edición : junio 2019

Tiraje : 1 000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2019-07775

Distribución y ventas al por mayor y menor

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L. en el mes de junio de 2019

Jr. Coricancha N°675 Urb. Zárate S.J.L.

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Teléfono 423-8154

Introducción

Con el objetivo de seguir contribuyendo en la formación de nuestra juventud preunivesitaria y como material de apoyo a los docentes matemáticos, presento este nuevo libro: "Proporcionalidad de segmentos y Semejanza de triángulos".

Es grato ver el avance en el campo de la matemática en nuestro Perú, los éxitos logrados por nuestros estudiantes es fruto de su gran esfuerzo y dedicación, así como la inversión de algunas instituciones privadas y del apoyo y colaboración de muchos profesores. Con el propósito de seguir aportando y llegar a más lugares, es que he elaborado un material para un público amplio.

El tema de la "Proporcionalidad de segmentos y Semejanza de triángulos", se relaciona con diversas ramas de las matemáticas, como razones y proporciones, con las fracciones, regla de tres, en la física conceptos como densidad, velocidad, presión, también en la geografía en el uso de escalas y conversiones, así como sus aplicaciones en la realidad: como en la Ingeniería en la elaboración de planos y en la Arquitectura en la construcción de maquetas y así encontraremos muchas aplicaciones más.

El texto nos ayudará a tener una preparación adecuada en el estudio de la "Proporcionalidad de segmentos y Semejanza de triángulos" iniciando con una teoría básica, luego se profundiza con temas que tienen que ver con el análisis de teoremas recíprocos y diversos casos de las propiedades, se finaliza la teoría con temas para Olimpiadas matemáticas, como estudio de la homotecia geometría de masas y de la razón doble. La parte práctica consta de 300 problemas resueltos y 300 problemas propuestos, ordenados de menor a mayor dificultad.

Agradezco las sugerencias y críticas de los lectores,

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- A mis padres Moisés y Margarita.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
- A todos mis alumnos y ex alumnos, por su colaboración, por sus consultas y sugerencias.
- A los profesores y amigos: Lucy Casas, Roberto Mariño, Edson Curahua y César Trucios, por su gran apoyo.

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

Pág.

Índice

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

GEOMETRÍA

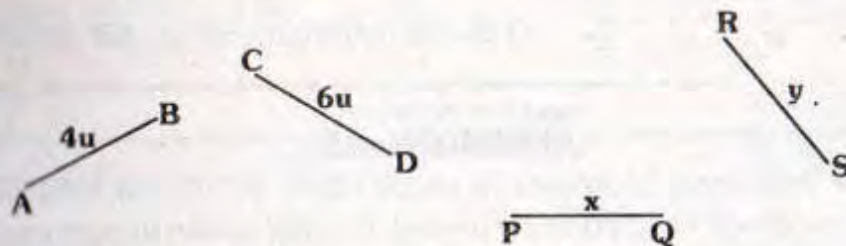
> No hay ninguna rama de las matemáticas, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.
>
> **Lobachevsky**

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

Veamos algunas definiciones que tienen que ver con la comparación de dos cantidades (en esta publicación: comparación de segmentos) para su uso posterior en teoremas geométricos.

RAZÓN GEOMÉTRICA DE DOS SEGMENTOS

Se denomina razón de dos segmentos al resultado de comparar por cociente, las longitudes de dos segmentos expresado en las mismas unidades.

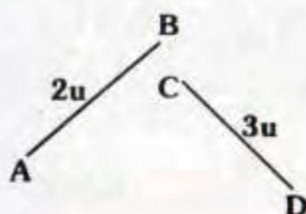


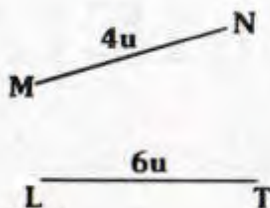
$$\frac{AB}{CD}=\frac{4u}{6u}=\frac{2}{3} \qquad \frac{PQ}{RS}=\frac{x}{y}$$

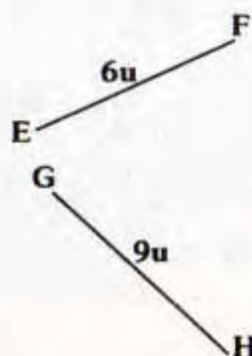
- La razón geométrica o simplemente razón de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es 2/3 y la razón de $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ es x/y
- Se lee: AB es como 2 y CD como 3 o también se puede escribir: $3(AB)=2(CD)$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Es la igualdad de dos o más razones.







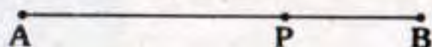
Podemos observar: $\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{LT}=\frac{EF}{GH}=\frac{2}{3}$

Decimos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales con $\overline{MN}$ y $\overline{LT}$ y a su vez con $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

DIVISIÓN INTERNA

Si un punto está entre los extremos de un segmento (*distinto de dichos extremos*) se dice que lo divide internamente.



El punto P divide internamente a $\overline{AB}$ en la razón: $\frac{AP}{PB}$ y P divide a $\overline{BA}$ en la razón $\frac{BP}{PA}$

DIVISIÓN EXTERNA

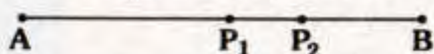
Si un punto está ubicado en alguna de las prolongaciones de un segmento, se dice que lo divide externamente.

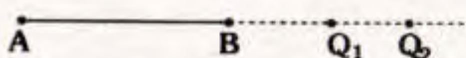


Q divide externamente a $\overline{AB}$ en la razón $\frac{AQ}{QB}$

Observación

- *En esta parte solo consideraremos la razón como la de sus longitudes, es decir* AP=PA, *pero veremos en la parte de anexos una definición importante: "SEGMENTOS DIRIGIDOS", donde:* $AP \neq PA$ *(similar a vectores).*
- *Si dos puntos dividen a un segmento internamente o exteriormente en la misma razón dichos puntos coinciden.*



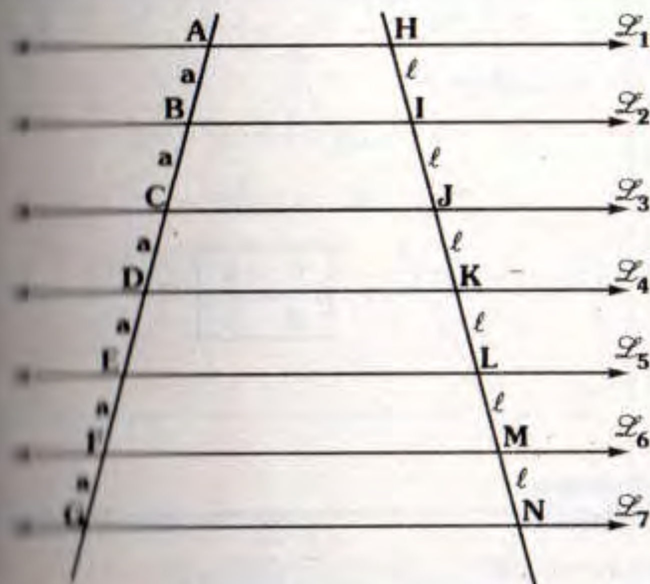


Si $\frac{AP_1}{P_1B}=\frac{AP_2}{P_2B} \Rightarrow P_1=P_2$

Si $\frac{AQ_1}{Q_1B}=\frac{AQ_2}{Q_2B} \Rightarrow Q_1=Q_2$

TEOREMA (DE LAS RECTAS EQUIPARALELAS)

Si tres o más rectas paralelas determinan sobre una secante segmentos congruentes también determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.



Si : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_5} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_6}$

y $AB = BC = CD = DE = EF = FG$

Se cumple:

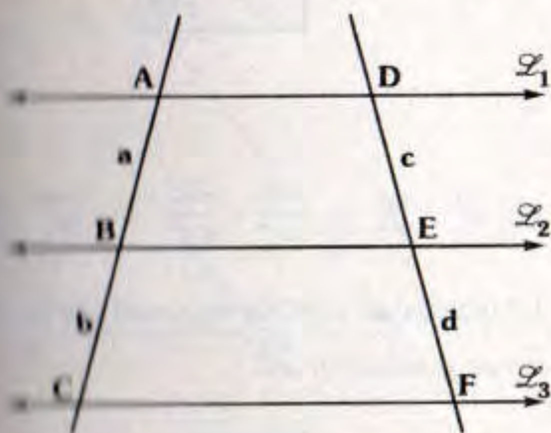
$$HI = IJ = JK = KL = LM = MN$$

Prueba

- Basta observar que en el trapecio ACJH, $\overline{BI}$ es su base media $\Rightarrow HI = IJ$
- Análogamente se procede en los demás trapecios $\Rightarrow HI = IJ = JK = KL = LM = MN$

TEOREMA DE TALES

Si dos rectas cualesquiera son intersecadas por un conjunto de rectas paralelas, entonces sobre dichas rectas se determinan segmentos proporcionales.



En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$

Se cumple:

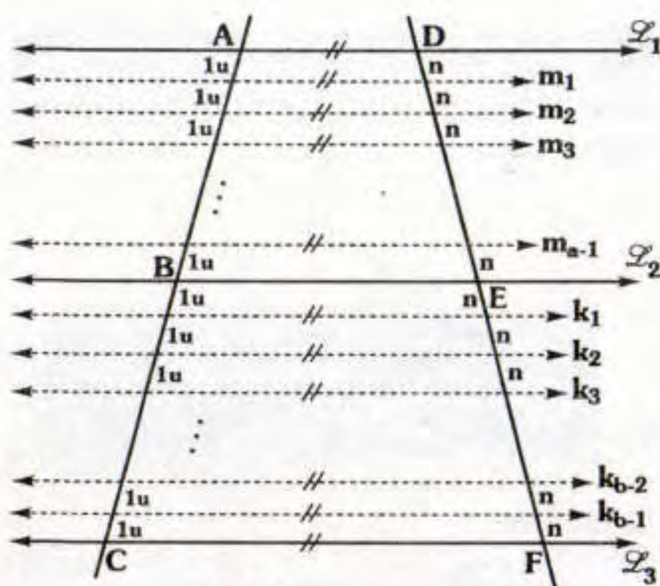
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

O también:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Demostración

Haremos la prueba para el caso en que $\frac{a}{b}$ es racional (*el caso en que sea irracional lo veremos en los anexos*).



- El segmento AB lo dividimos en "**a**" partes iguales y el segmento EF en "**b**" partes entonces en $\overline{DF}$ se determinan también partes iguales al trazar paralelas m_1, m_2, ... m_{a-1}, y k_1, k_2, ... k_{b-1}.
- Luego:

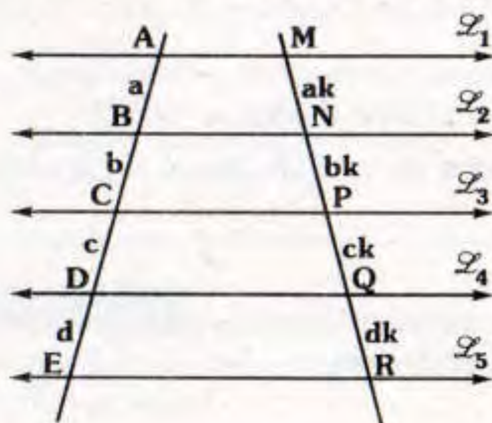
$DE=c=na$ y

$EF=d=nb$

$$\therefore \boxed{\frac{c}{d}=\frac{a}{b}}$$

Observaciones

- *Si son más de tres paralelas, se puede plantear así:*



Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_5}$

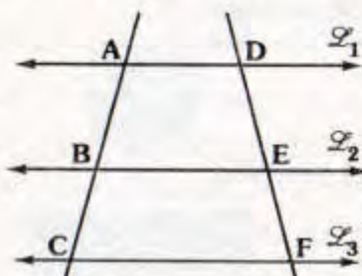
Se cumple:

$$\boxed{\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{CD}{PQ}=\frac{DE}{QR}}$$

También:

$$\boxed{\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{PQ}}$$

- *En el gráfico:*



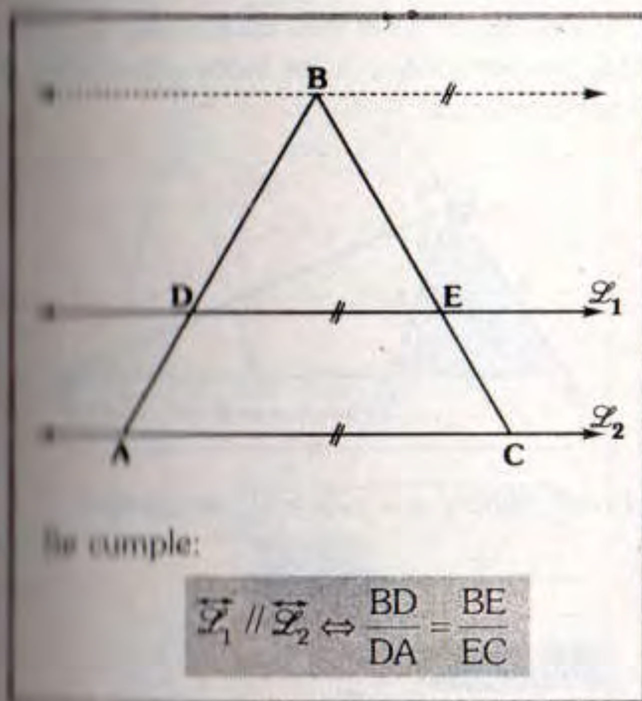
Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ *y* $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF} \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

La prueba es sencilla suponiendo que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ *no es paralela a* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

- *En el gráfico anterior, si* $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$ *entonces "**no necesariamente**" se cumple que* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$. *Es decir el teorema de Tales no es recíproco sino como en el caso anterior, se llama "RECIPROCO PARCIAL".*

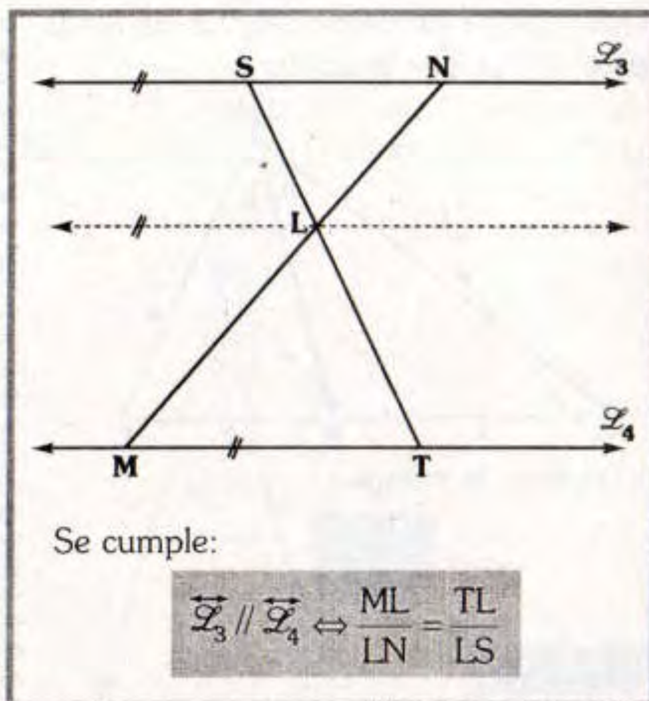
COROLARIOS DEL TEOREMA DE TALES

Es decir casos particulares del teorema; veamos:



Se cumple:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Leftrightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$

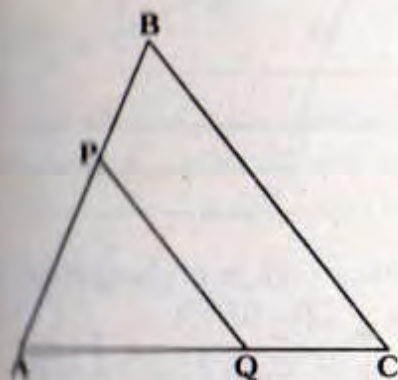


Se cumple:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} \Leftrightarrow \frac{ML}{LN} = \frac{TL}{LS}$$

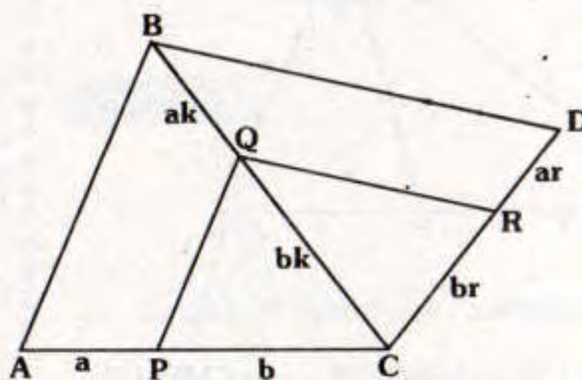
Nota

* *No perder de vista que los corolarios son recíprocos y aplicables al triángulo en cualquier ubicación, por ejemplo:*



Si: $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

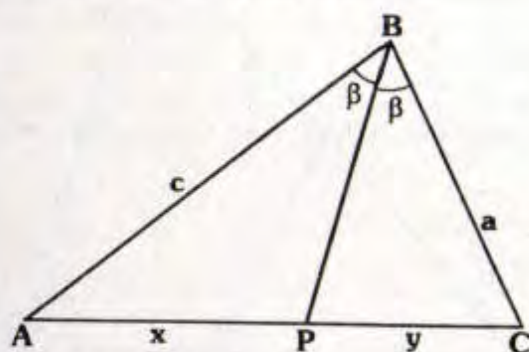


Si: $\overline{AB} \,//\, \overline{PQ}$ *y* $\overline{QR} \,//\, \overline{BD}$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{DR}{RC}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

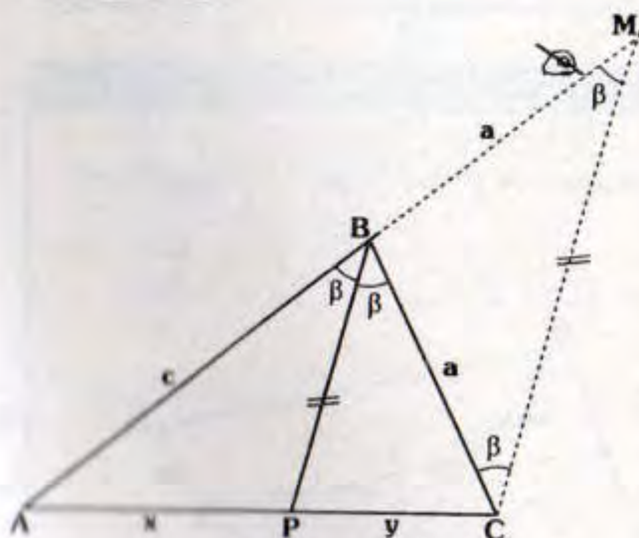
En todo triángulo la bisectriz interior, divide internamente al lado al cual es relativo en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.



En el gráfico, se cumple:

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{a}$$

Prueba



- Prolongamos $\overline{AB}$ hasta M talque:

$$\overline{PB} // \overline{CM} \Rightarrow m\measuredangle BCM = m\measuredangle CMB = \beta$$

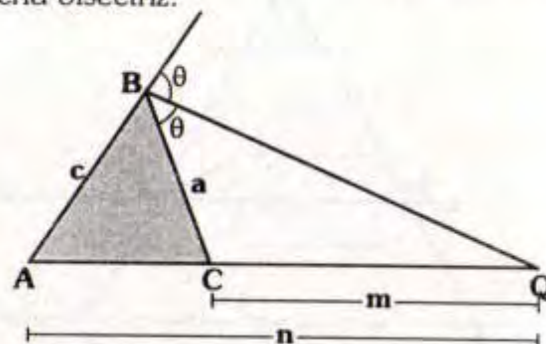
$$\Rightarrow BC = BM = a$$

- Por corolario del teorema de Tales:

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{a}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

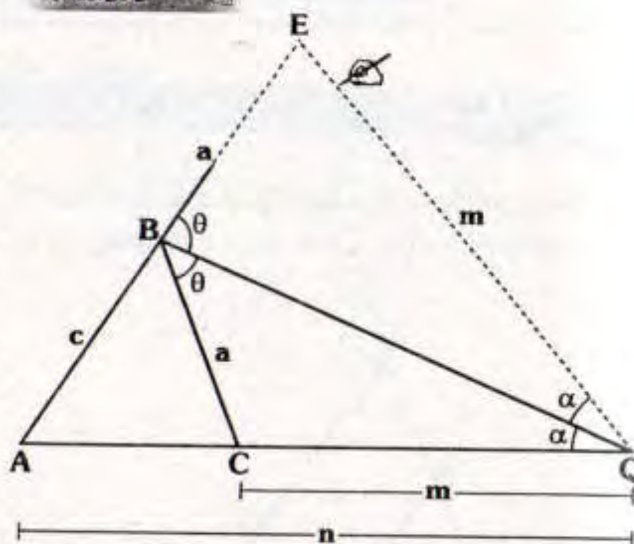
En todo triángulo, la bisectriz exterior (*con los lados adyacentes de diferente longitud*) divide externamente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.



En el gráfico, $a \neq c$ $(c>a)$, se cumple:

$$\frac{n}{m}=\frac{c}{a}$$

Prueba



- Ubicamos E en la prolongación de $\overline{AB}$ talque : $CB=BE=a$

$$\Rightarrow \Delta CBQ \cong \Delta EBQ \text{ (LAL)}$$

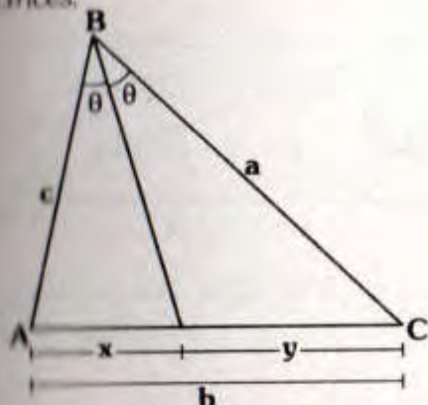
luego: $CQ=QE=m$ y

$$m\measuredangle AQB = m\measuredangle BQE = \alpha$$

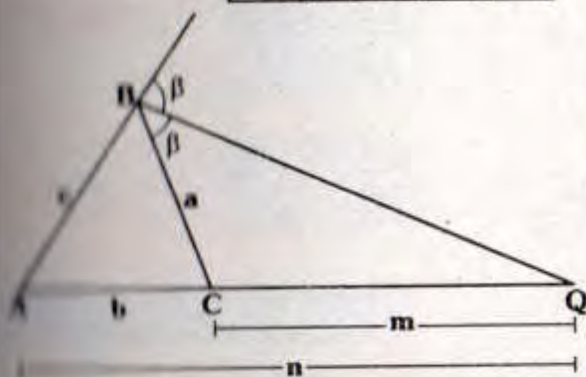
- Por teorema de la bisectriz interior, en el ΔAEQ : $\frac{n}{m}=\frac{c}{a}$

Observaciones

- Como consecuencia de lo anterior podemos calcular en función de los lados, cada uno de los segmentos determinados por las bisectrices:

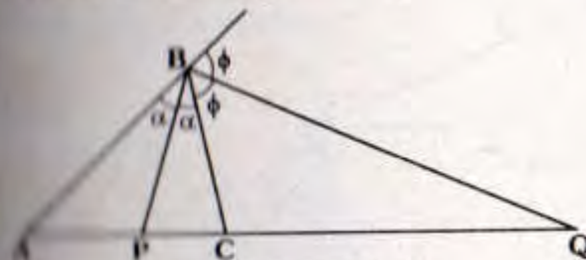


Se cumple: $x = \dfrac{cb}{a+c}$; $y = \dfrac{ab}{a+c}$



Se cumple: $n = \dfrac{cb}{c-a}$; $m = \dfrac{ab}{c-a}$

- Como conclusión del teorema de la bisectriz interior y exterior, tendremos:

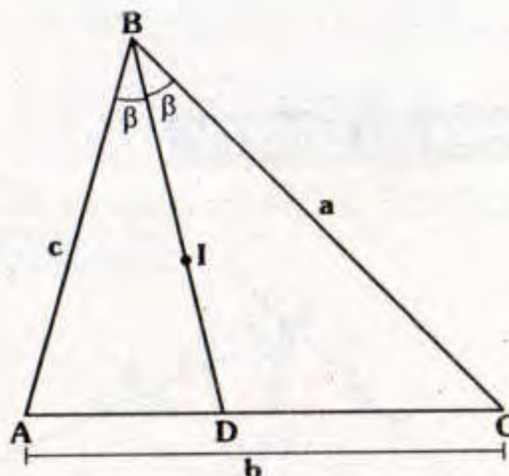


Se cumple: $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AQ}{QC}$

Esta relación se denomina *CUATERNA ARMÓNICA*, de la cual analizaremos más adelante.

TEOREMA DEL INCENTRO

En todo triángulo el incentro divide internamente a una bisectriz interior (*la razón es del mayor y menor segmento*) en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz y la longitud del tercer lado.

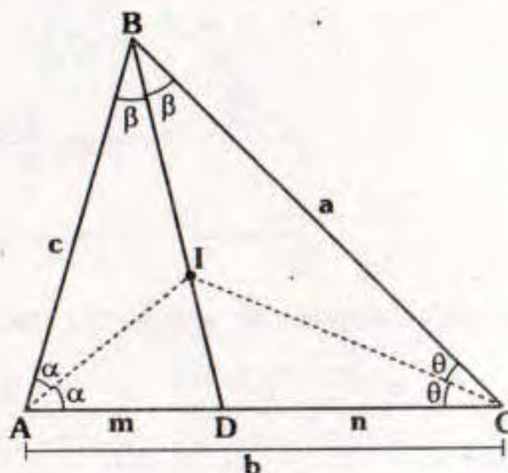


En el gráfico, I es incentro del ΔABC.

Se cumple:

$$\frac{BI}{ID} = \frac{a+c}{b}$$

Prueba



Usemos el teorema de la bisectriz interior en los triángulos ABD y CBD:

$$\frac{BI}{ID}=\frac{c}{m}=\frac{a}{n} \Rightarrow \frac{BI}{ID}=\frac{c+a}{m+n} \quad \therefore \quad \frac{BI}{ID}=\frac{a+c}{b}$$

Observación

Como: $b<a+c \Rightarrow 1<\frac{a+c}{b} \Rightarrow 1<\frac{BI}{ID} \quad \therefore ID<BI$

TEOREMA DEL EXCENTRO

En el gráfico, E es excentro relativa a $\overline{BC}$ del ΔABC.

Se cumple:

$$\frac{BE}{EM}=\frac{c-a}{b}$$

$$\frac{AE}{ER}=\frac{c+b}{a}$$

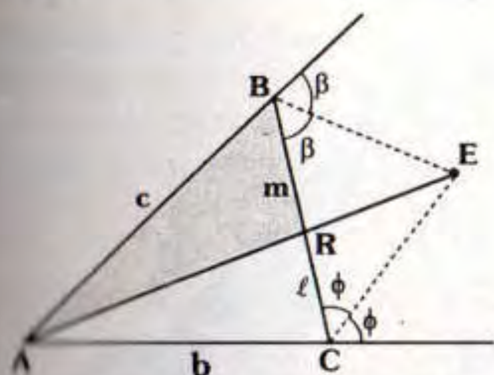
Prueba

– Demostración de la primera expresión:

Usemos el teorema de la bisectriz interior en los triángulos ABM y BCM:

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{n}=\frac{a}{m} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{c-a}{n-m} \text{ ; como } n-m=b \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{c-a}{b}$$

- Demostremos ahora la segunda expresión:



En los triángulos ABR y ACR por teorema de la bisectriz exterior:

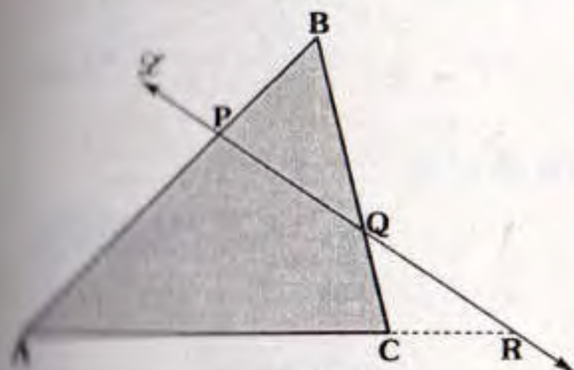
$$\frac{AE}{ER}=\frac{c}{m}=\frac{b}{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AE}{ER}=\frac{c+b}{m+\ell}$$

$$\therefore \quad \frac{AE}{ER}=\frac{c+b}{a}$$

TEOREMA DE MENELAO

Toda recta secante a dos lados de un triángulo y a la prolongación del tercer lado, determinan seis segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de las otras tres.



En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta secante o transversal al ΔABC.

Los seis segmentos determinados son:

$$\overline{AP},\ \overline{PB},\ \overline{BQ},\ \overline{QC},\ \overline{CR}\ \text{y}\ \overline{RA}$$

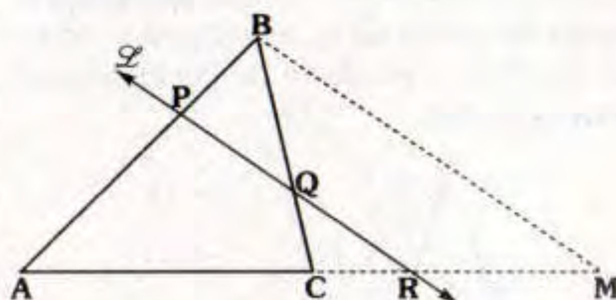
Se cumple:

$$(AP)(BQ)(CR)=(PB)(QC)(RA)$$

o equivalentemente:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Prueba



- Se traza $\overline{BM} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ $(M \in \overleftrightarrow{AR})$

- Por teorema de Tales en:

$$\Delta ABM: \ \frac{AP}{PB}=\frac{AR}{RM} \qquad \text{... (I)}$$

$$\Delta BCM: \ \frac{BQ}{QC}=\frac{MR}{RC} \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}=\frac{AR}{\cancel{RM}}\cdot\frac{\cancel{MR}}{RC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{AR}=1$$

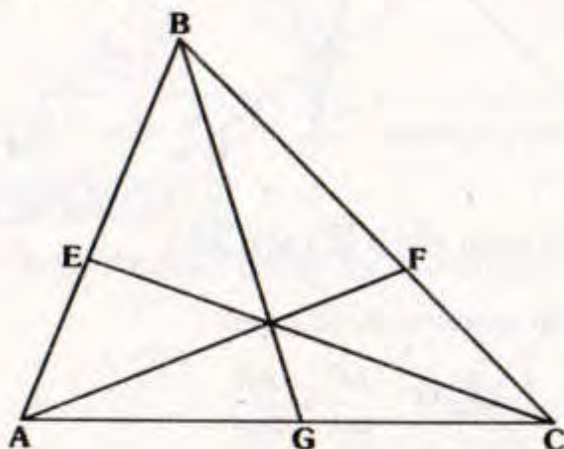
$$\therefore \quad (AP)(BQ)(CR)=(PB)(QC)(RA)$$

Nota

- *Como se indicó en un inicio, estamos considerando sólo la longitud o normas de los segmentos (no segmentos dirigidos).*
- *Más adelante estudiaremos otro caso del teorema de Menelao para la recta exterior, los recíprocos y su generalización para los polígonos.*

TEOREMA DE CEVA

En un triángulo al trazar tres cevianas concurrentes, determinan en cada lado segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremos comunes, es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



- En el gráfico, $\overline{AF}$, $\overline{CE}$ y $\overline{BG}$ son cevianas concurrentes.
- Los seis segmentos son: $\overline{AE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BF}$, $\overline{FC}$, $\overline{CG}$ y GA.

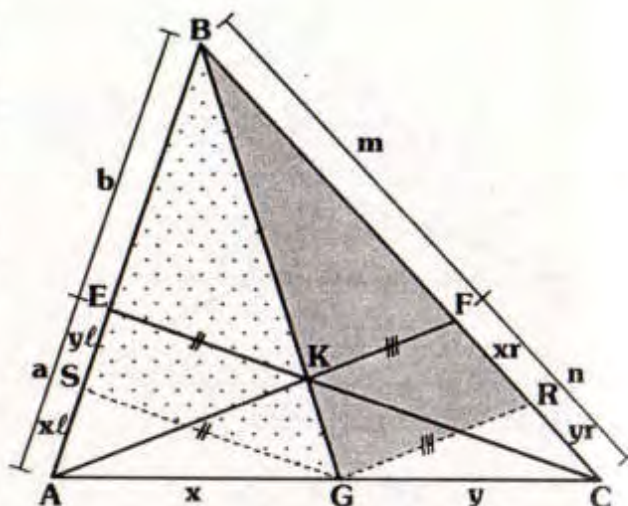
Se cumple:

$$(AE)(BF)(CG)=(EB)(FC)(GA)$$

ó

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

Prueba



- Se ubica "S" en $\overline{AE}$ y "R" en $\overline{FC}$ tal que $\overline{GS}//\overline{KE}$ y $\overline{GR}//\overline{KF}$, por teorema de Tales:

$$\frac{b}{y\ell}=\frac{BK}{KG}=\frac{m}{xr}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y\ell}=\frac{m}{xr}$$

$$\Rightarrow \frac{bx}{my}=\frac{\ell}{r} \quad ...\text{(I)}$$

- Como: $a=(x+y)\ell$ y $n=(x+y)r$

$$\Rightarrow \frac{a}{n}=\frac{\ell}{r} \quad ...\text{(II)}$$

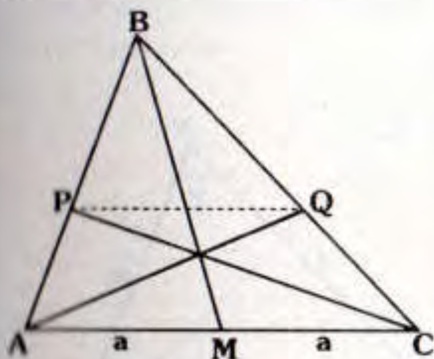
- De (I) y (II):

$$\frac{bx}{my}=\frac{a}{n}$$

$$\therefore\ nbx=amy$$

Observación

- *Más adelante estudiaremos el teorema de Ceva para dos cevianas exteriores y una interior, así como el recíproco.*
- *Veamos que ocurre si una ceviana es mediana:*



Si $AM=MC \Rightarrow \overline{PQ}//\overline{AC}$

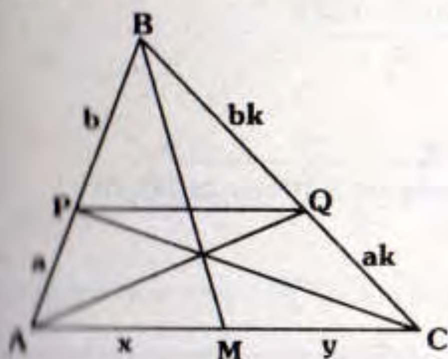
Prueba

- *Por teorema de Ceva:*

$$(AP)(BQ)a=(PB)(QC)a$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC} \quad \therefore \overline{PQ}//\overline{AC}$$

- *También:*



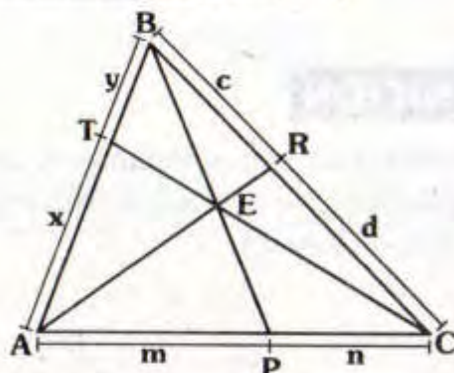
Si $\overline{PQ}//\overline{AC} \Rightarrow AM=MC$

Prueba

- *Por teorema de Ceva:* $xbak=yabk$

$$\Rightarrow x=y$$

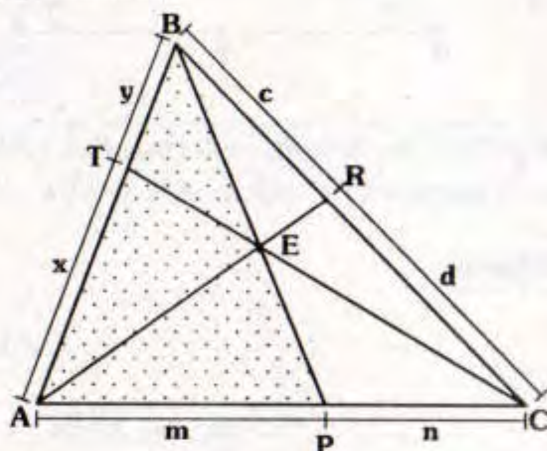
TEOREMA DE VAN AUBEL



En el gráfico, se cumple:

$$\frac{AE}{ER}=\frac{x}{y}+\frac{m}{n}\ ;\ \frac{BE}{EP}=\frac{y}{x}+\frac{c}{d}\ ;\ \frac{CE}{ET}=\frac{n}{m}+\frac{d}{c}$$

Prueba



Usemos el teorema de Menelao:

– En ΔABP: $x(BE)n=y(EP)(m+n)$

$$\Rightarrow \frac{n}{m+n}=\frac{y(EP)}{x(BE)} \quad \ldots (I)$$

– En ΔPBC: $$\frac{m}{m+n}=\frac{c(EP)}{d(BE)} \quad \ldots (II)$$

– Sumando (I) y (II):

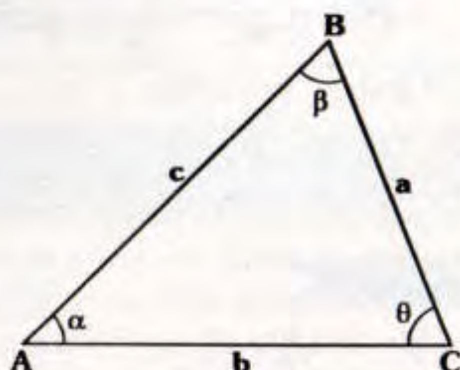
$$\underbrace{\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}}_{1}=\frac{y(EP)}{x(BE)}+\frac{c(EP)}{d(BE)}$$

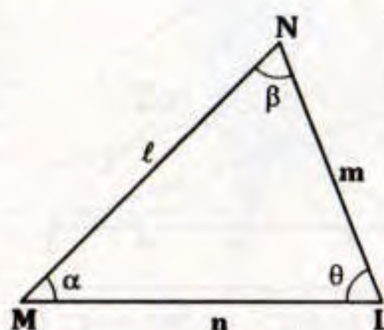
$$\Rightarrow 1=\frac{EP}{BE}\left(\frac{y}{x}+\frac{c}{d}\right) \quad \therefore \frac{BE}{EP}=\frac{y}{x}+\frac{c}{d}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN

Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos internos son de igual medida respectivamente y los lados opuestos a dichos ángulos (*denominados lados homólogos*) son respectivamente proporcionales.





En el gráfico, los ángulos internos del ΔABC y del ΔMNL son de igual medida respectivamente y los pares de lados, $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$; $\overline{AC}$ y $\overline{ML}$ y $\overline{BC}$ con $\overline{NL}$ son lados homólogos.

Notación

$$\Delta ABC \sim \Delta MNL$$

"Se lee: el ΔABC es semejante con el ΔMNL"

Se cumple:

$$\frac{a}{m}=\frac{c}{\ell}=\frac{b}{n}=k$$ k: constante de semejanza $(k>0)$

Observaciones

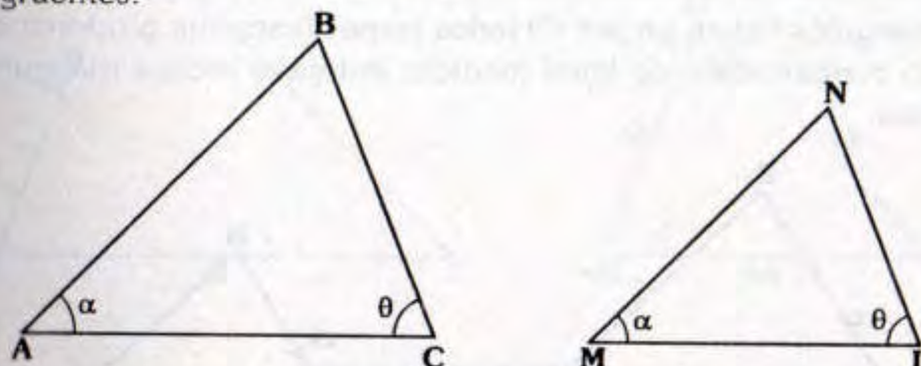
- *En los ejercicios dependiendo de lo que se quiera calcular se puede poner:* $a=mk$, $c=\ell k$ *y* $b=nk$ *o si buscamos productos, se tendrá por ejemplo:* $a\ell=mc$
- *En la sección de anexos definimos la semejanza para todas las figuras.*
- *Si* $k=1 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNL$

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Son condiciones que cumplen dos triángulos para que sean semejantes.

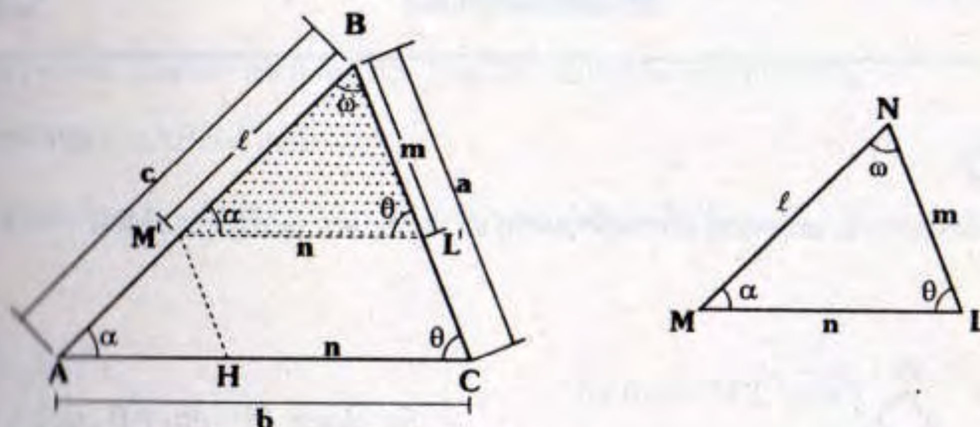
CRITERIO 1

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente congruentes:



Se cumple que: $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

[illegible]



Es fácil notar que $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MNL$

Si $\frac{c}{\ell} = 1$ entonces los triángulos son congruentes (*caso particular de la semejanza*)

Sea: $c > \ell$ entonces se ubica M' en $\overline{AB}$ tal que: $M'B = MN$, se traza $\overline{M'L'} // \overline{AC}$

Luego $\Delta M'BL' \cong \Delta MNL$

Por teorema de Tales: $\frac{c}{\ell} = \frac{a}{m}$ ... (I)

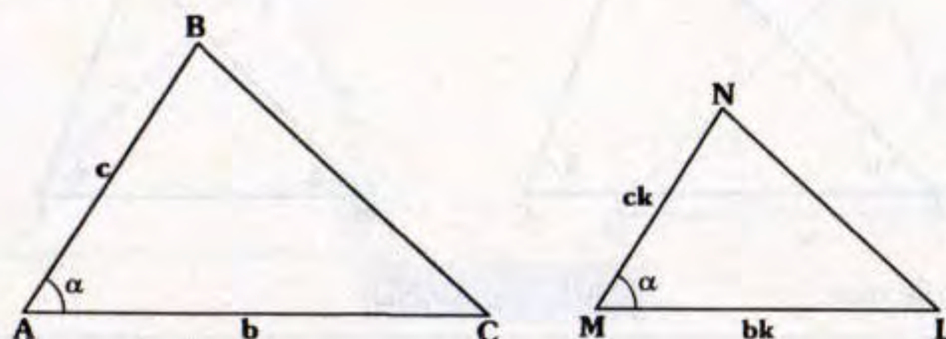
Se traza $\overline{M'H} // \overline{BC} \Rightarrow HM'L'C$: paralelogramo, con $M'L' = HC = n$

– Por teorema de Tales: $\frac{c}{\ell}=\frac{b}{n}$ ... (II)

– De (I) y (II): $\frac{c}{\ell}=\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, lo cual prueba la condición para la semejanza de triángulos.

CRITERIO 2

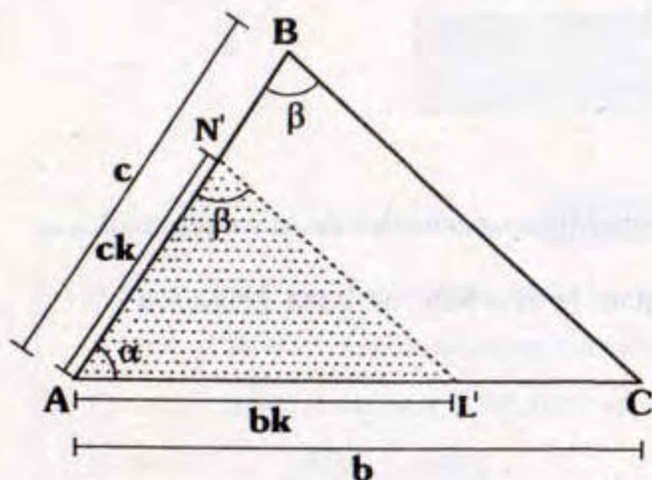
Si dos triángulos tienen un par de lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido de igual medida, entonces dichos triángulos son semejantes.



Se cumple: $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

Prueba

La prueba es similar a la anterior, considerando si: $k=1 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNL$, si $k<1$ entonces:



– Se ubica N' en $\overline{AB}$ y L' en $\overline{AC}$ tal que: $AN' = MN$ y $AL' = ML$

$\Rightarrow \Delta AN'L' \cong \Delta MNL$

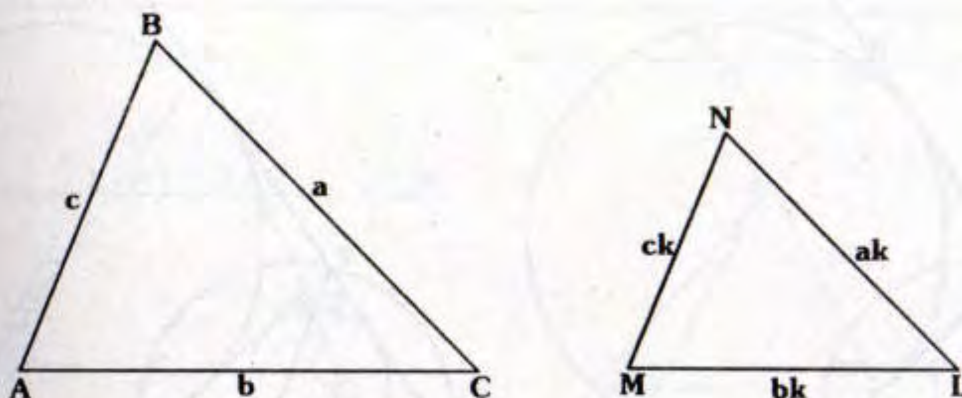
– Por el recíproco del teorema de Tales (1*er corolario*):

$\overline{N'L'} // \overline{BC}$

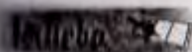
$\Rightarrow m\measuredangle AN'L' = m\measuredangle MNL = m\measuredangle ABC$

CRITERIO 3

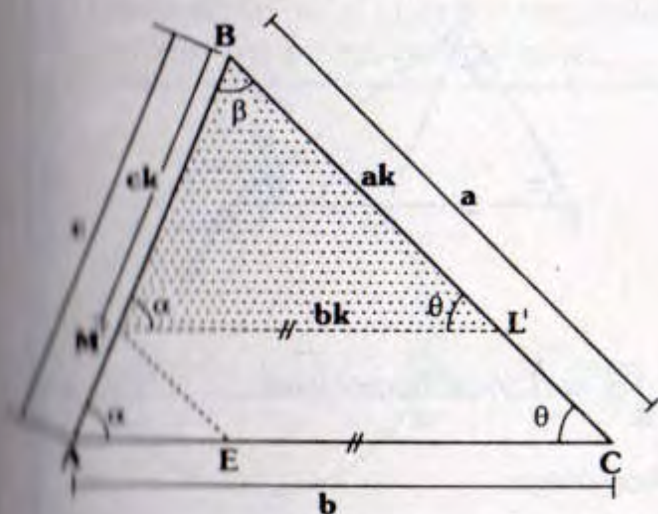
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.



Se cumple: $\Delta ABC \sim \Delta MNL$



- Sólo falta probar que los ángulos son respectivamente congruentes.
- Si $k=1$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNL$
- Si $k<1$ entonces se ubica M' en $\overline{AB}$ tal que $MN = M'B$



- Se traza $\overline{M'L'} \,//\, \overline{BC}$.

  $\Rightarrow$ Por teorema de Tales: $BL' = ak$

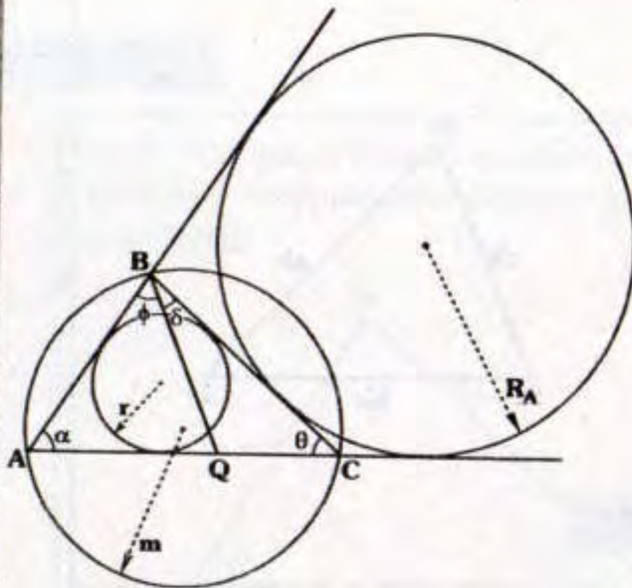
- Se traza:

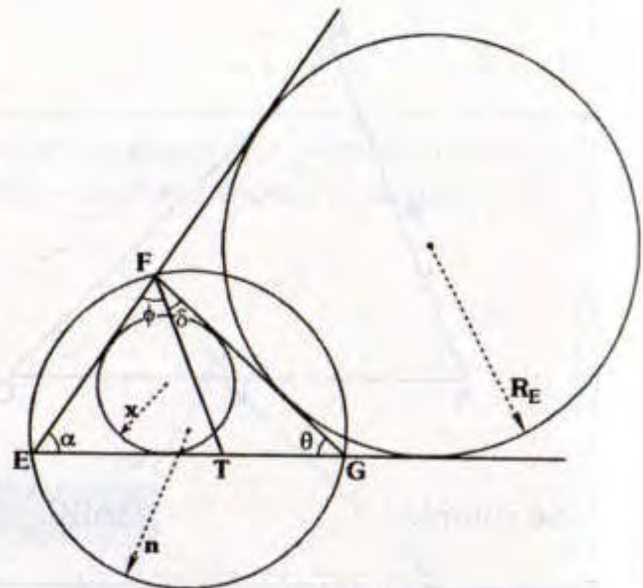
  $\overline{M'E} \,//\, \overline{BC} \;\Rightarrow\; EC = bk = M'L'$

- $\Delta M'BL' \cong \Delta MNL$, ello prueba que los triángulos son respectivamente congruentes (*Caso* LLL).

Observación

- *Si dos triángulos son semejantes, entonces son proporcionales todas las longitudes de sus respectivos elementos homólogos.*

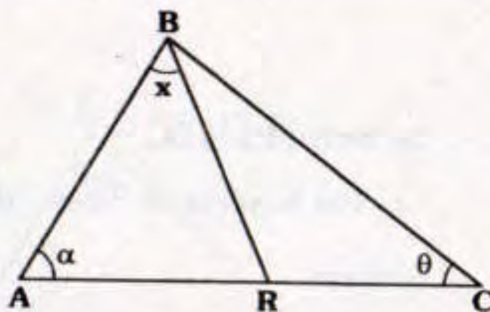


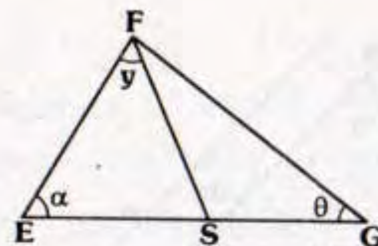


En el gráfico, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ *entonces:*

$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{EG}=\frac{r}{x}=\frac{m}{n}=\frac{R_A}{R_E}=\frac{\text{Perímetro}_{\Delta ABC}}{\text{Perímetro}_{\Delta EFG}}=\frac{AQ}{ET}=\frac{BQ}{FT}=k$$

- *En el gráfico,* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$





Se cumple:

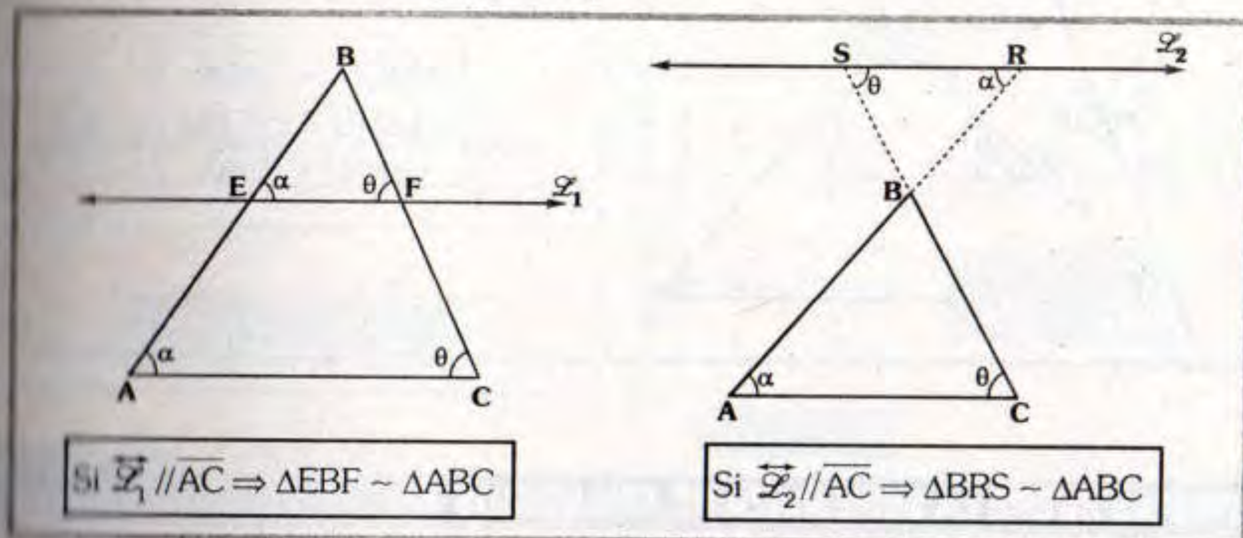
$$\frac{AR}{RC}=\frac{ES}{SG} \Leftrightarrow x=y$$ ($\overline{BR}$ *y* $\overline{FS}$ *son líneas homólogas*)

Es decir es la manera de reconocer líneas homólogas.

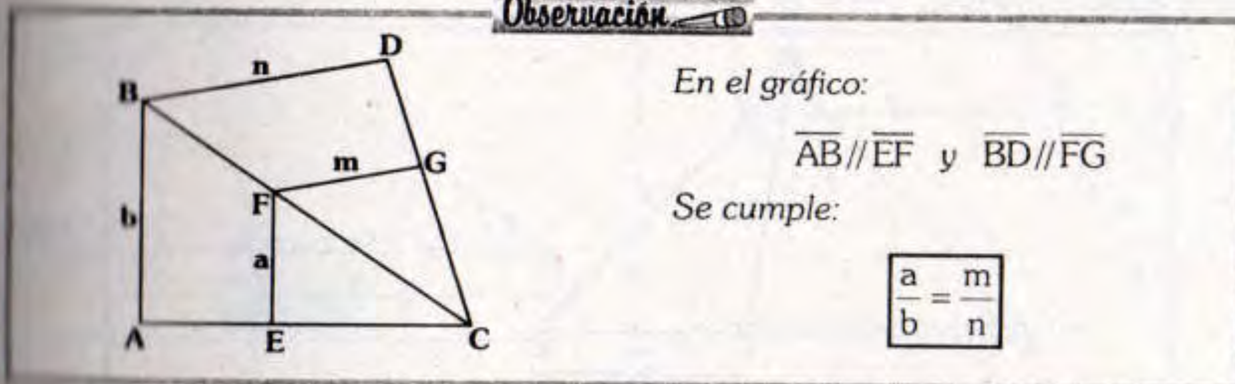
FIGURAS COMUNES DONDE OBSERVAREMOS LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En las siguientes figuras veremos situaciones usuales de la semejanza de triángulos:

1. Toda recta paralela a un lado de un triángulo, secante a los otros lados o a sus prolongaciones, determinan dos triángulos semejantes.



Observación



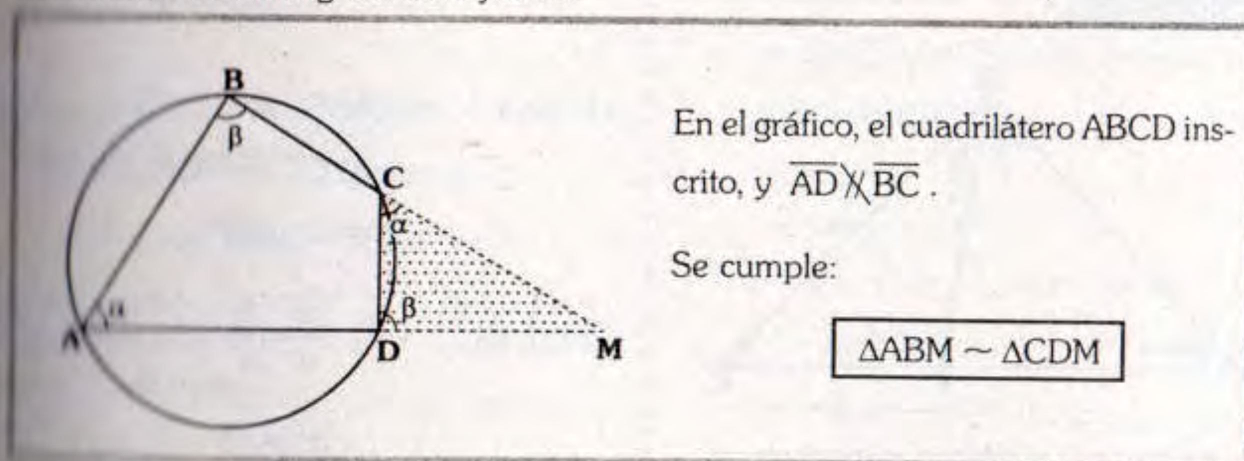
En el gráfico:

$\overline{AB} // \overline{EF}$ y $\overline{BD} // \overline{FG}$

Se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

2. Al prolongar los lados opuestos no paralelos de un cuadrilátero inscrito o inscriptible, se determinan dos triángulos semejantes.

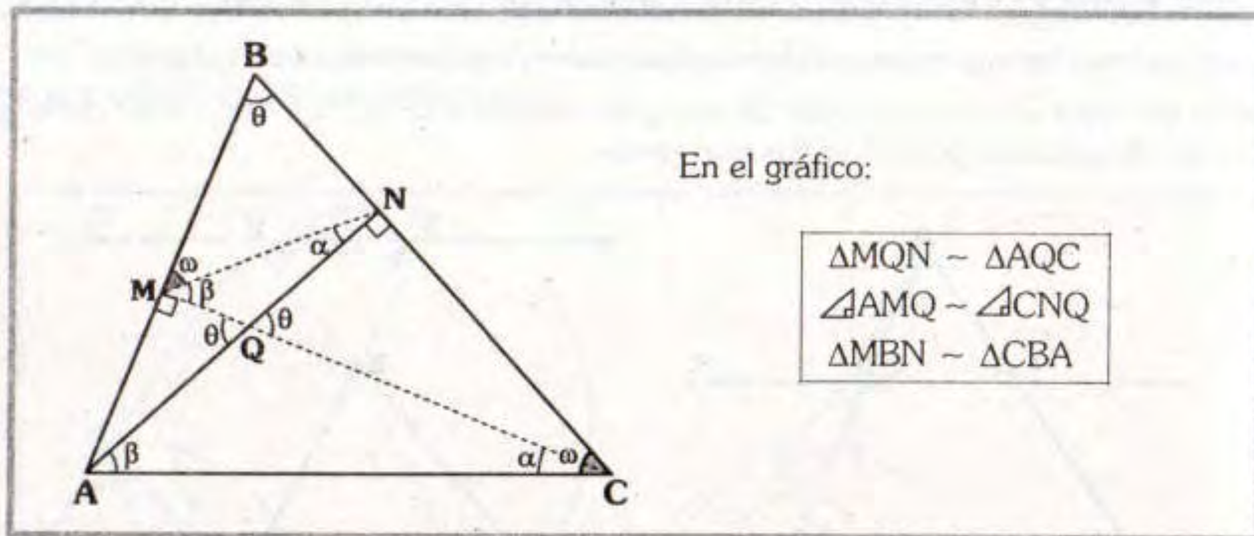


En el gráfico, el cuadrilátero ABCD inscrito, y $\overline{AD} \nparallel \overline{BC}$.

Se cumple:

$\Delta ABM \sim \Delta CDM$

- En un triángulo al trazar dos alturas notaremos varios pares de triángulos semejantes.

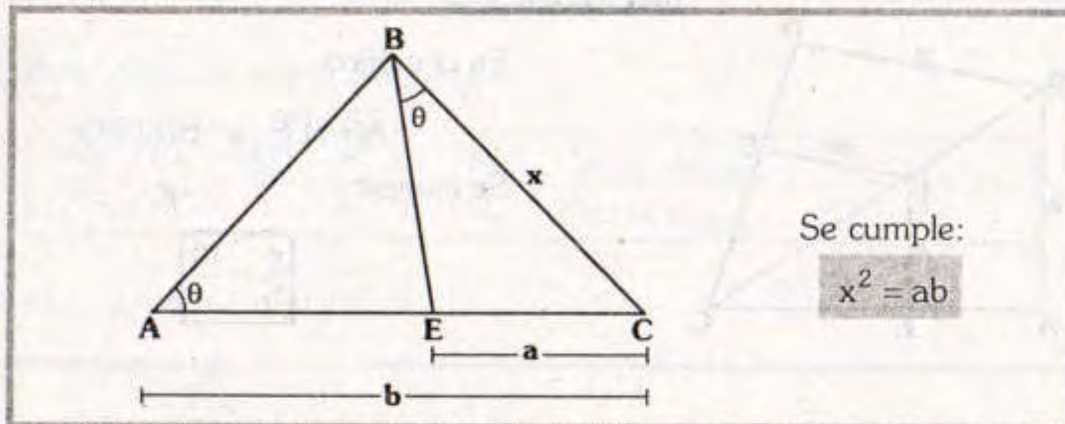


En el gráfico:

$\Delta MQN \sim \Delta AQC$
$\measuredangle AMQ \sim \measuredangle CNQ$
$\Delta MBN \sim \Delta CBA$

TEOREMAS SOBRE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

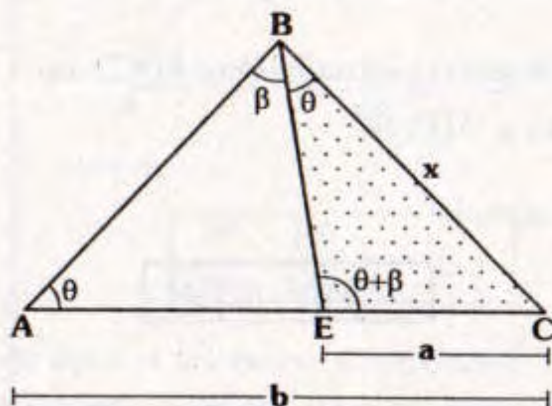
❶ En el gráfico, $m\measuredangle BAC = m\measuredangle EBC$



Se cumple:

$x^2 = ab$

Prueba



– Sea: $m\measuredangle ABE = \beta$

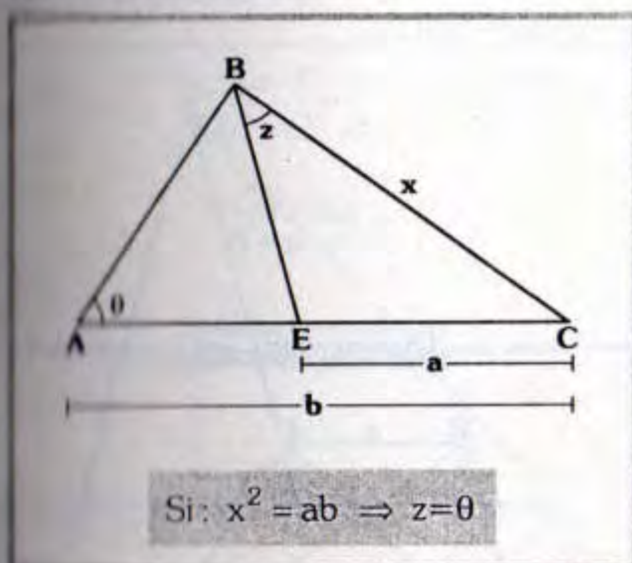
$\Rightarrow m\measuredangle BEC = m\measuredangle ABC = \theta + \beta$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BEC$

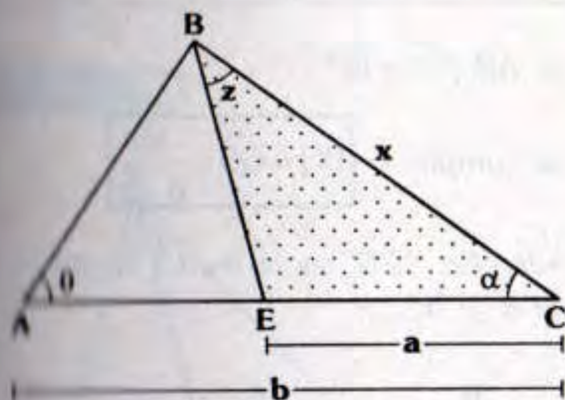
– Luego: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{x}$

$\therefore\ x^2 = ab$

❹ Veamos el recíproco del caso anterior:



Prueba



- Como:

$$x^2 = ab \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

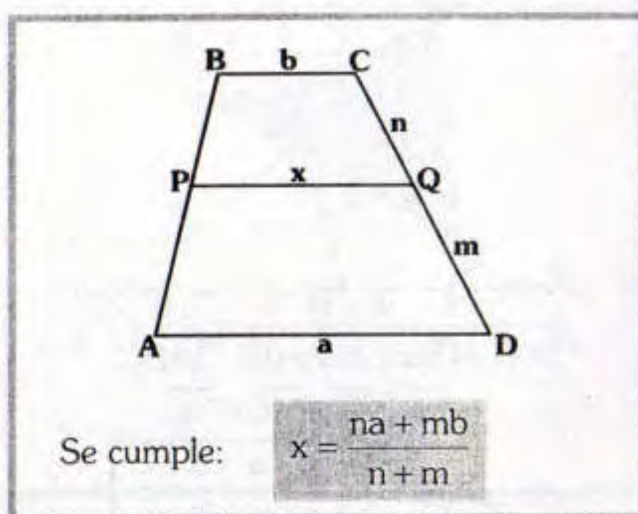
- Sea $m\sphericalangle ECB = \alpha$, luego por el segundo caso de la semejanza:

$$\Delta ECB \sim \Delta BCA$$

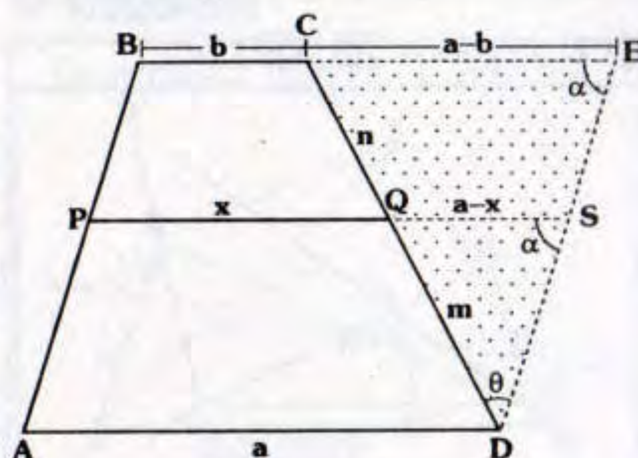
- Luego, por la regla: "a lados proporcionales se oponen ángulos iguales" entonces:

$$\theta = z$$

❺ En el gráfico, $\overline{AD} // \overline{PQ} // \overline{BC}$



Prueba



- Se ubica E en la prolongación de $\overline{BC}$ talque $\overline{DE} // \overline{AB}$, se prolonga $\overline{PQ}$ hasta que corte a $\overline{DE}$ en S.

  $\Rightarrow$ ABED y APSD son paralelogramos

- $\Delta DSQ \sim \Delta DEC$

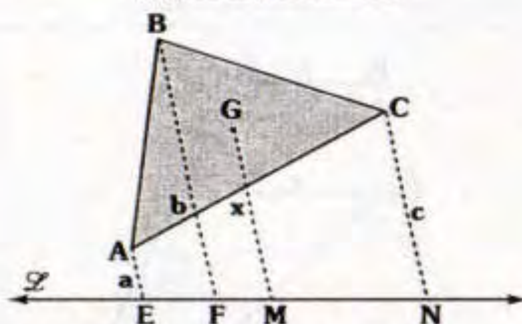
$$\Rightarrow \frac{a-x}{a-b} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow a(m+n) - x(m+n) = m(a-b)$$

$$\Rightarrow \cancel{am} + an - x(m+n) = \cancel{ma} - mb$$

$$\therefore \frac{an+mb}{m+n} = x$$

Observación



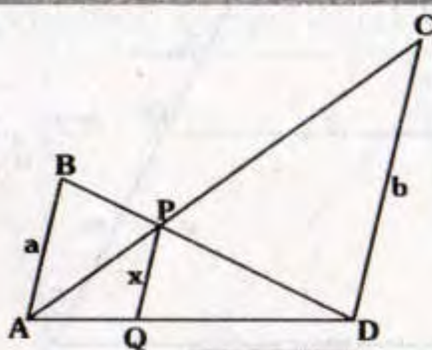
Si G es baricentro del ΔABC

y $\overline{EA}//\overline{FB}//\overline{MG}//\overline{NC}$

Se cumple: $x=\dfrac{a+b+c}{3}$

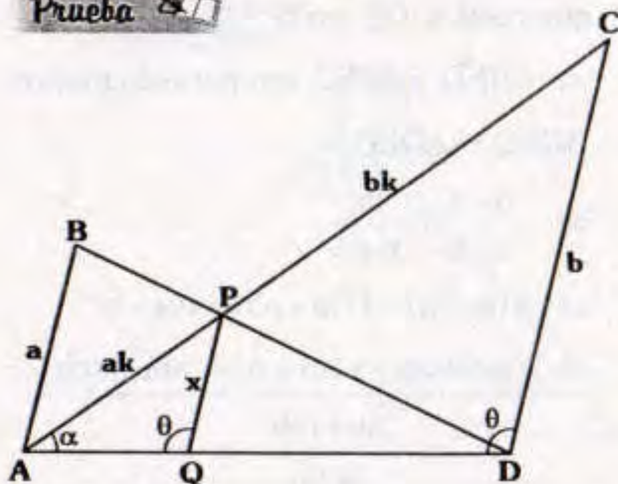
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

4 En el gráfico, $\overline{AB}//\overline{QP}//\overline{DC}$



Se cumple: $x=\dfrac{ab}{a+b}$

Prueba



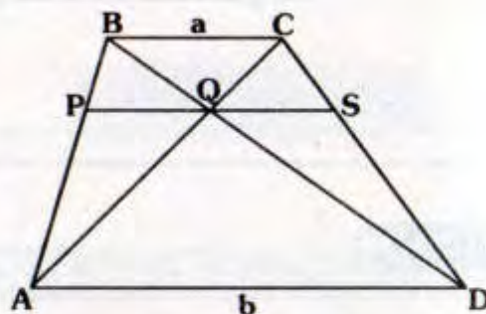
– $\Delta ABP\sim\Delta CDP \Rightarrow AP=ak$ y $PC=bk$

– $\Delta AQP\sim\Delta DC$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{b}=\frac{a\not{k}}{(a+b)\not{k}}$$

$$\therefore \; x=\frac{ab}{a+b}$$

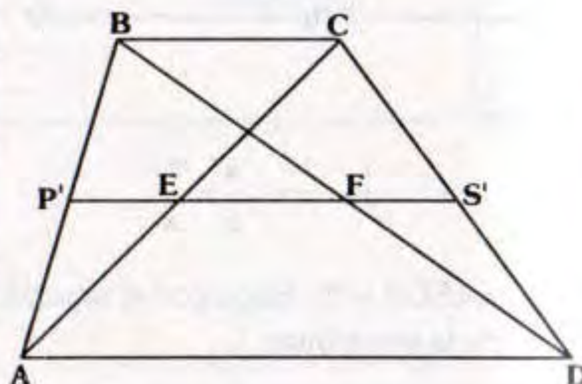
Observación



Si $\overline{AB}//\overline{PS}//\overline{BC}$

Se cumple: $PQ=QS=\dfrac{ab}{a+b}$

Además: "PS" es la media armónica de **a** *y* **b**.

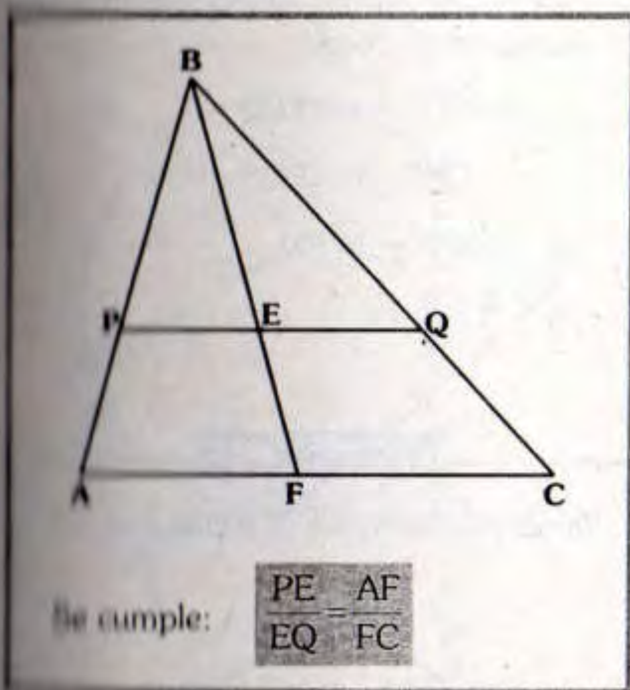


Si : $\overline{AD}//\overline{BC}//\overline{P'S'}$

Se cumple:

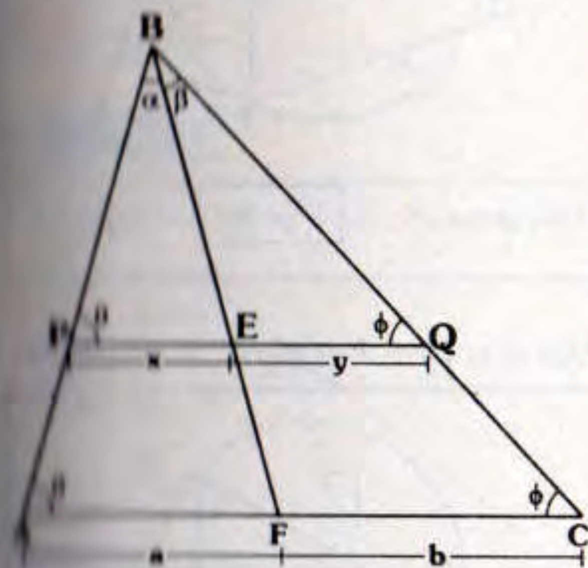
$P'E=FS'$

5 En el gráfico, $\overline{AC} // \overline{PQ}$



Se cumple: $\frac{PE}{EQ}=\frac{AF}{FC}$

Prueba

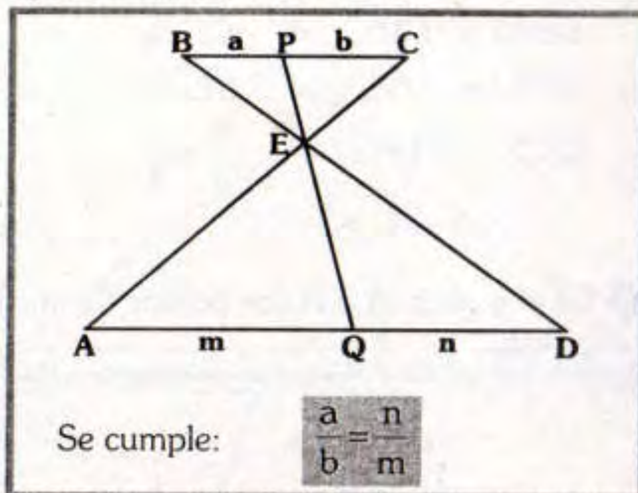


$\triangle ABC \sim \triangle PBQ$

Las líneas $\overline{BF}$ y $\overline{BE}$ son homólogos

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

6 En el gráfico, $\overline{AD} // \overline{BC}$

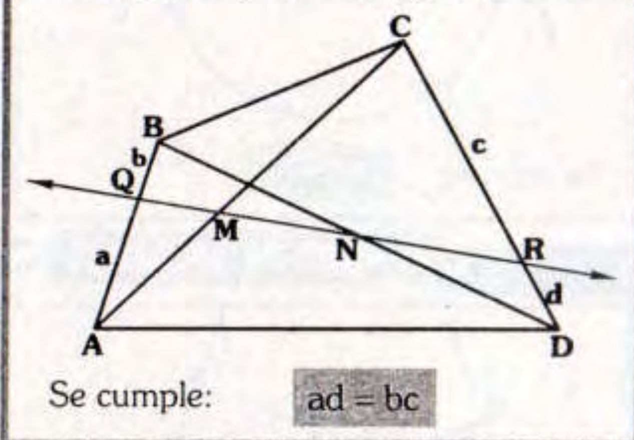


Se cumple: $\frac{a}{b}=\frac{n}{m}$

La prueba es análoga a la anterior.

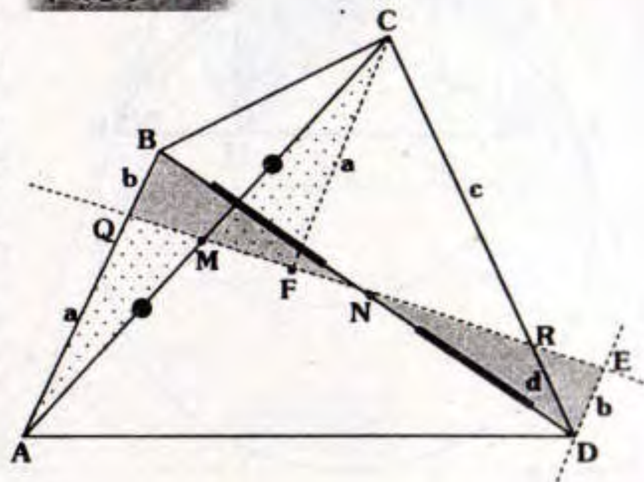
7 **TEOREMA**

En el gráfico, AM=MC y BN=ND.



Se cumple: $ad=bc$

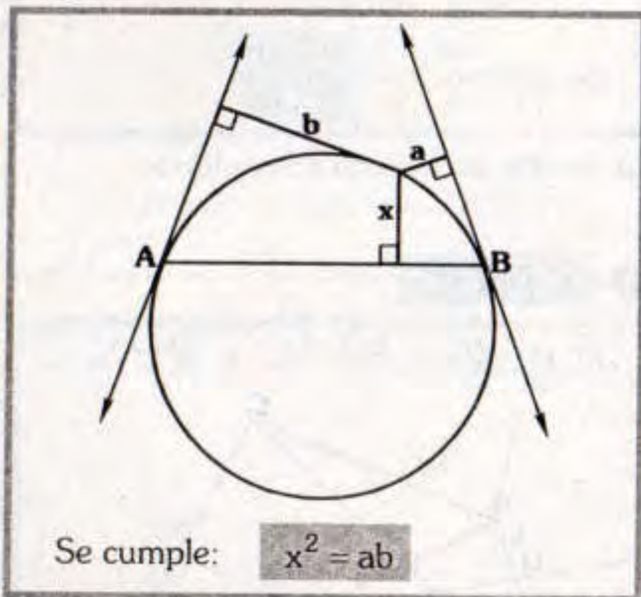
Prueba



- Por C y D se trazan las paralelas a $\overline{AB}$.
- $\Delta AMQ \cong \Delta CMF \Rightarrow CF=a$
- $\Delta BNQ \cong \Delta DNE \Rightarrow DE=b$
- $\Delta FCR \cong \Delta EDR \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

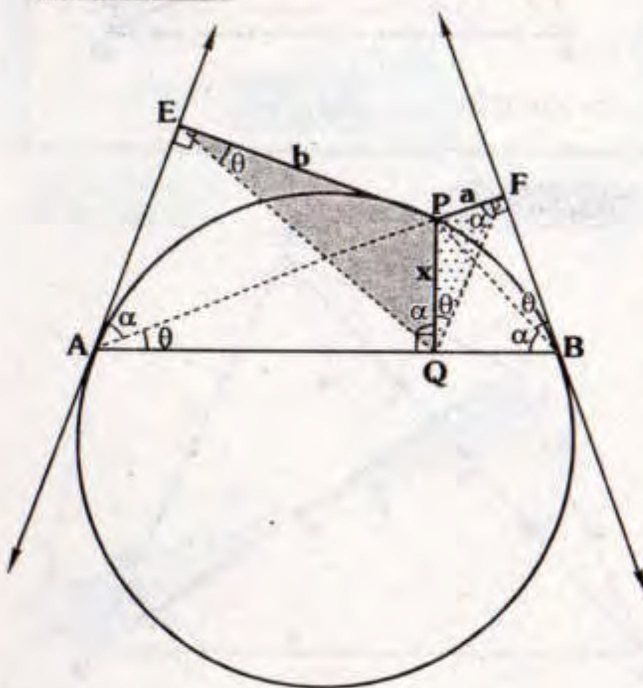
$\therefore\ ad = bc$

8 En el gráfico, A y B son puntos de tangencia.



Se cumple: $x^2 = ab$

Prueba



- Sea $m\measuredangle PAQ = \theta$ y $m\measuredangle PAE = \alpha$ y
- Los cuadriláteros AEPQ y QPFB son inscriptibles, luego:

$m\measuredangle EQP = m\measuredangle PFQ = \alpha$ y

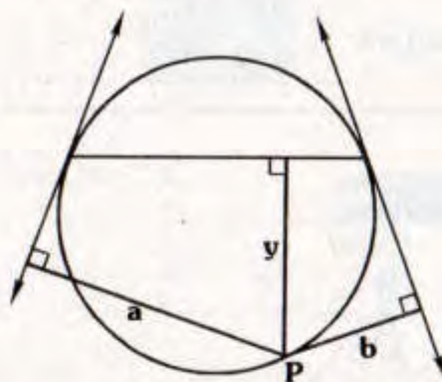
$m\measuredangle QEP = m\measuredangle PQF = \theta$

$\Rightarrow \Delta QPE \sim \Delta FPQ$

$\Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{a}{x}$ $\quad\therefore\ x^2 = ab$

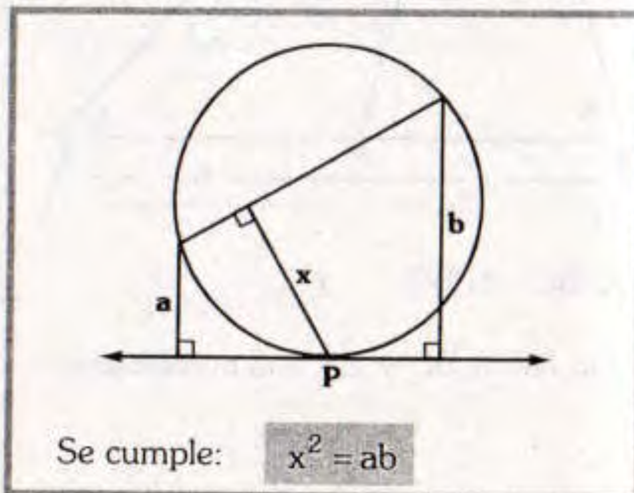
Observación

También el teorema es válido en:



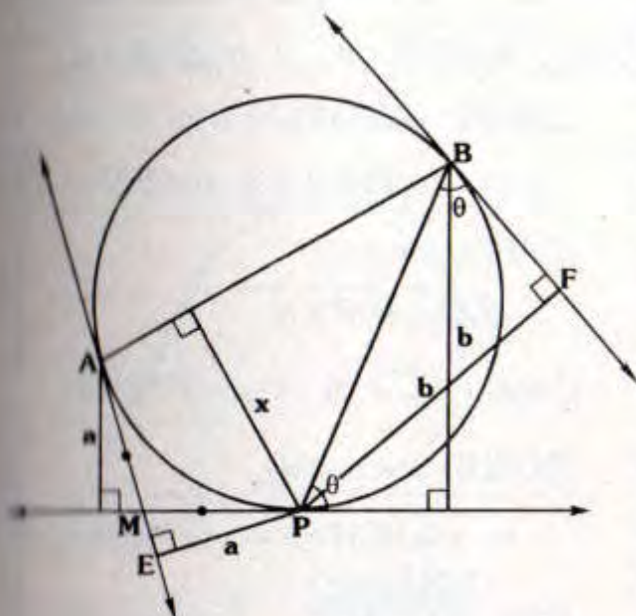
Se cumple: $y^2 = ab$

9 En el gráfico, P es punto de tangencia.



Se cumple: $x^2 = ab$

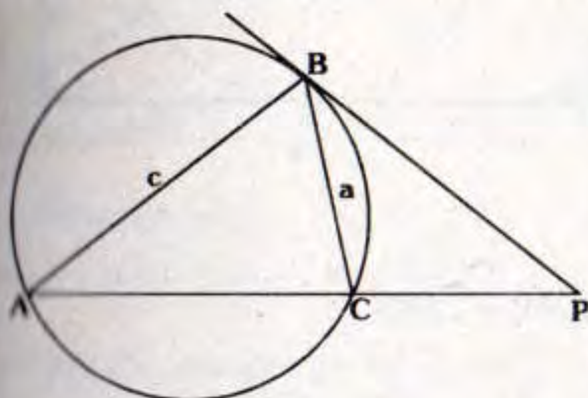
Prueba



- En A y B se trazan las tangentes.
- Luego PE=a y PF=b.
- Por la propiedad anterior: $x^2 = ab$

10 TEOREMA

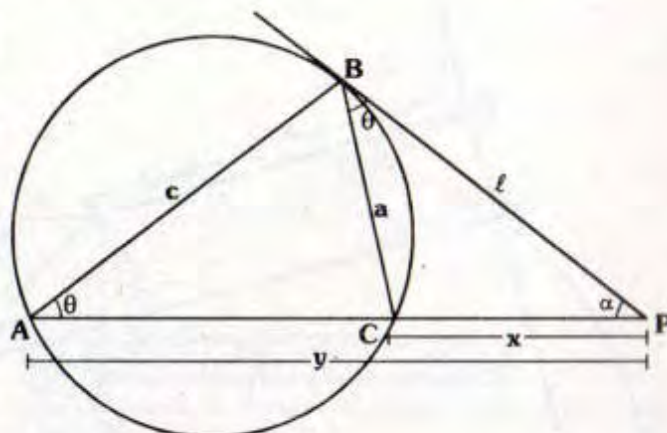
En el gráfico, B es punto de tangencia



Se cumple:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{a^2}{c^2}$$

Prueba



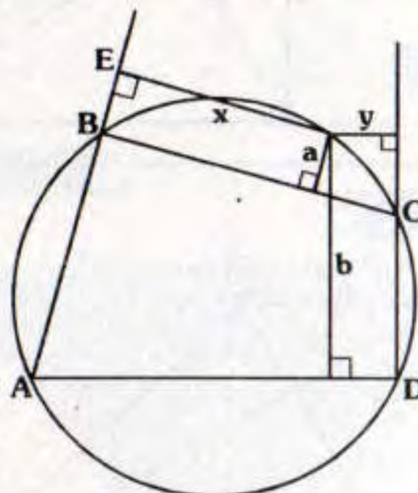
- Sea $m\sphericalangle BAC = \theta$

$\Rightarrow \quad m\widehat{BC} = 2\theta \Rightarrow m\sphericalangle CBP = \theta$

- $\Delta APB \sim \Delta BPC \Rightarrow \dfrac{x}{\ell} = \dfrac{\ell}{y} = \dfrac{a}{c}$
- Por propiedad de razones y proporciones:

$$\left(\frac{x}{\ell}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{y}\right) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^2}{c^2}$$

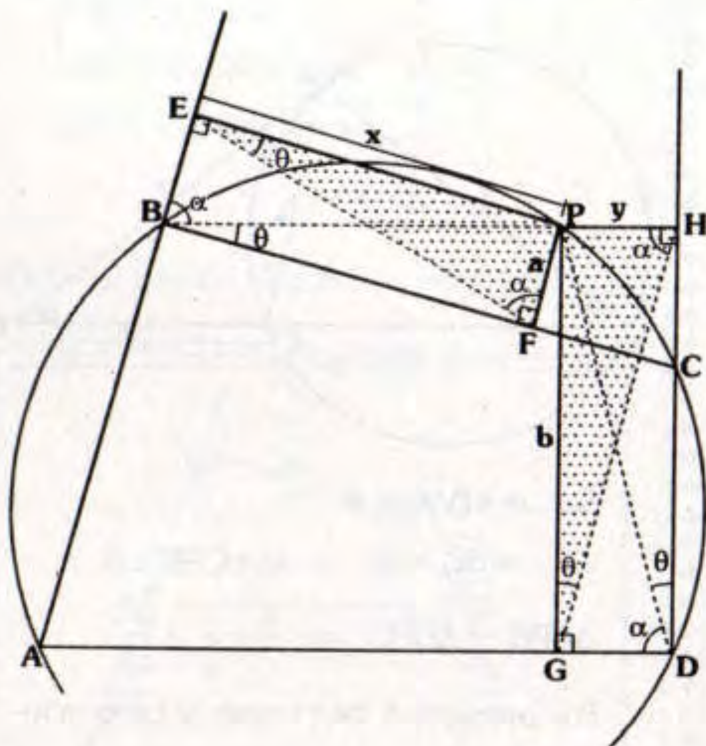
11 TEOREMA DE PAPPUS



Se cumple:

$$xy = ab$$

Prueba



Sea: $m\sphericalangle PEF=\theta$ y $m\sphericalangle EFP=\alpha$

– ⏢BEPF: inscriptible

$\Rightarrow\ m\sphericalangle PBF=\theta$ y $m\sphericalangle EBP=\alpha$

– ⏢ABPD: inscrito

$\Rightarrow\ m\sphericalangle ADP=\alpha$

– Como $m\overset{\frown}{PC}=2\theta \Rightarrow m\sphericalangle PDC=\theta$

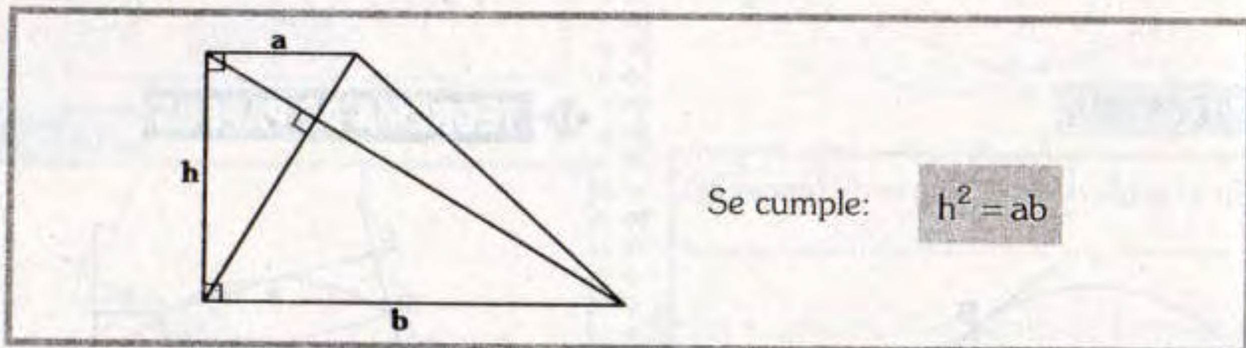
– ⏢GPHD: inscriptible

$\Rightarrow\ m\sphericalangle PGH=\theta$ y $m\sphericalangle PHG=\alpha$

– $\Delta EPF \sim \Delta GPH \Rightarrow \dfrac{a}{y}=\dfrac{x}{b}$

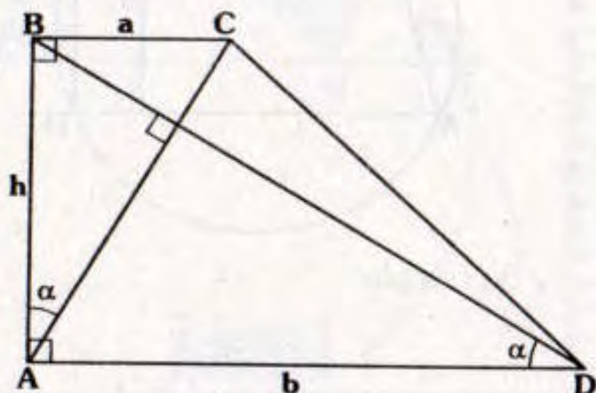
$\therefore\ xy=ab$

12 TEOREMA



Se cumple: $h^2=ab$

Prueba



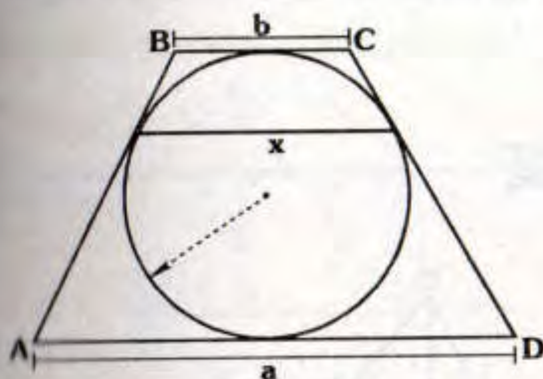
$\measuredangle DAB \sim \measuredangle ABC$

$\Rightarrow\ \dfrac{h}{b}=\dfrac{a}{h}$

$\therefore\ h^2=ab$

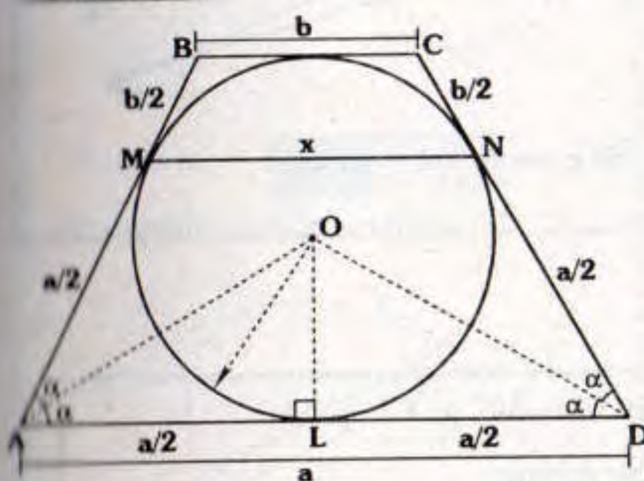
13 TEOREMA

En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el trapecio isósceles ABCD. (con $\overline{AD} // \overline{BC}$)



Se cumple: $x = \dfrac{2ab}{a+b}$

Prueba



- Notemos que :

$$m\widehat{ML} = m\widehat{LN} \Rightarrow \overline{AD} // \overline{MN}$$

- ΔAOD : isósceles $\Rightarrow AL = LD = \dfrac{a}{2}$

$$\Rightarrow AM = ND = \frac{a}{2}$$

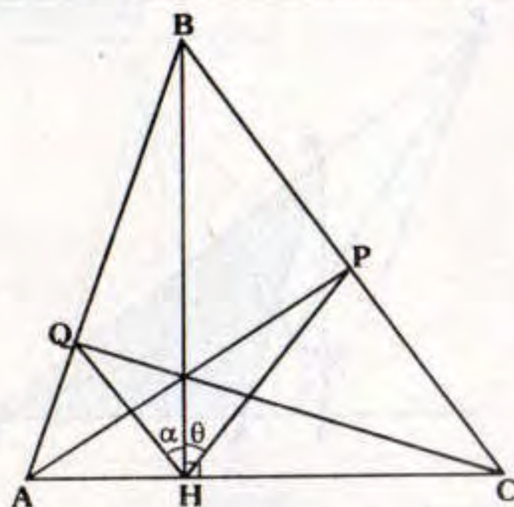
- Análogamente: $BM = CN = \dfrac{b}{2}$

- Por propiedad:

$$x = \frac{a\left(\frac{b}{2}\right) + b\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2ab}{a+b}$$

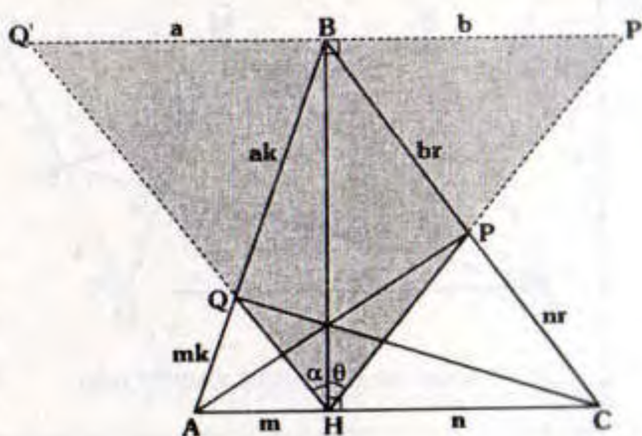
14 TEOREMA DE BLANCHET



En el gráfico, $\overline{BH}$, $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes.

Si $\overline{BH}$ es altura, se cumple: $\alpha = \theta$

Prueba

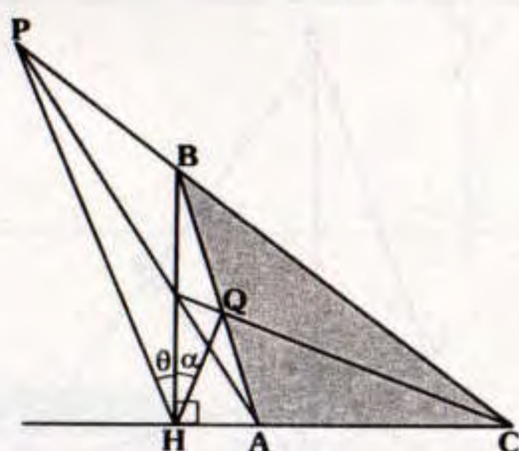


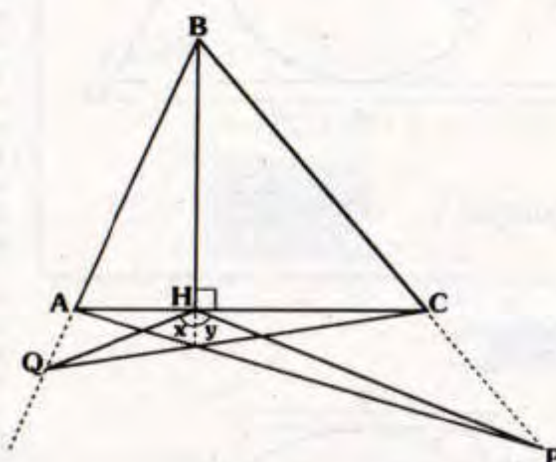
- Por B se traza la paralela a $\overline{AC}$ la cual es intersecada por las prolongaciones de $\overline{HQ}$ y $\overline{HP}$ en Q' y P' respectivamente.
- $\Delta AHQ \sim \Delta BQQ'$ y $\Delta HPC \sim \Delta P'PB$ $\Rightarrow$ AQ=mk, QB=ak, BP=br y PC=nr
- En ΔABC, teorema de Ceva: $(m)(ak)(nr) = n(br)(mk) \Rightarrow a=b$
- $\Delta HQ'P'$: isósceles

$$\therefore \ \alpha=\theta$$

Observación

Otras posibilidades del teorema de Blanchet:



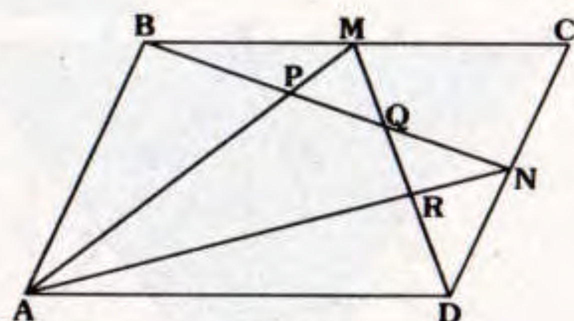


Se cumple: $\alpha=\theta$

Se cumple: $x=y$

15 TEOREMA

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo si BM=MC y CN=ND.



Se cumple:

$AR = 4(RN)$

$AP = 4(PM)$

$$\frac{BP}{6} = \frac{PQ}{4} = \frac{QN}{5}$$

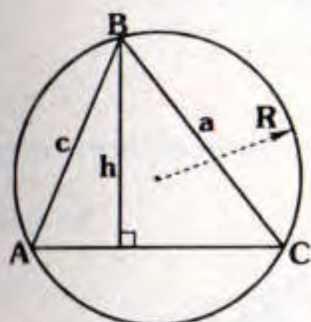
$$\frac{DR}{6} = \frac{QR}{4} = \frac{MQ}{5}$$

La prueba se deja como ejercicio.

Nota

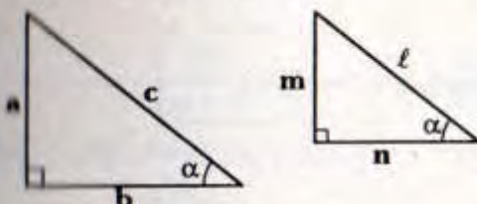
Los siguientes teoremas se profundizaron en la publicación de relaciones métricas que es en realidad, aplicaciones de la semejanza, se empleará en algunos problemas.

- **TEOREMA DEL PRODUCTO DE LADOS**



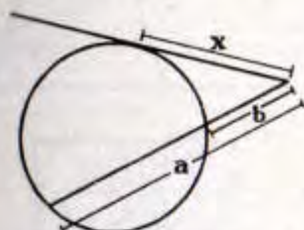
Se cumple: $ac = h(2R)$

- **TEOREMA DE DOSTOR**



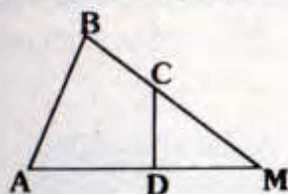
Se cumple: $am + bn = c\ell$

- **TEOREMA DE LA TANGENTE**



Se cumple: $x^2 = ab$

- *Si el ⌂ABCD es inscriptible*

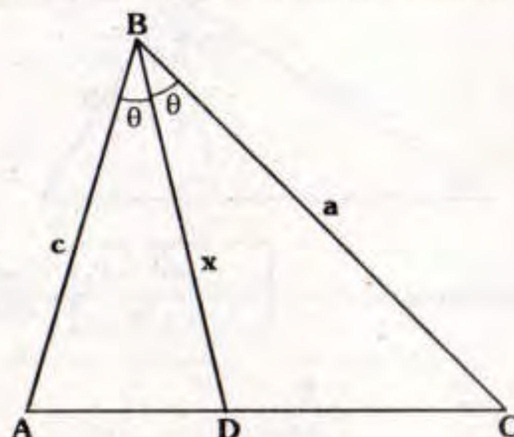


Se cumple: $(MD)(MA) = (MC)(MB)$

TEMAS ADICIONALES

En esta parte estudiaremos algunos temas que no se presentan en examen de admisión pero si en concursos interescolares olimpiadas matemáticas. Analizaremos otros casos, los recíprocos y aplicaciones del teorema de Menelao y Ceva, así como los teoremas de Newton y Desargues y aplicaciones de la división armónica.

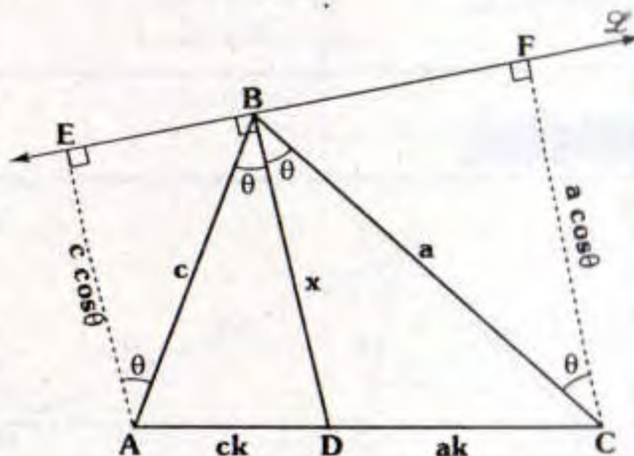
TEOREMA



En el gráfico, $\overline{BD}$ es bisectriz interior.

Se cumple: $x = \dfrac{2ac}{a+c}\cos\theta$

Prueba



- Se traza la recta $\mathscr{L}$, perpendicular a $\overline{BD}$ en B, luego se traza $\overline{AE} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overline{CF} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (E y F en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$).
- En ⊿AEB: $AE = c\cos\theta$
- En ⊿CFB: $FC = a\cos\theta$
- En ⏢AEFC, por propiedad:

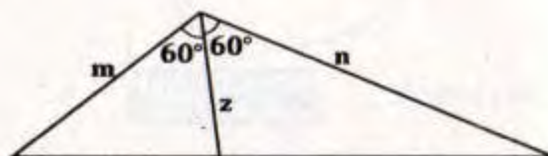
$$x = \frac{(c\cos\theta)ak + (a\cos\theta)ck}{ck + ak} \qquad \therefore\ x = \frac{2ac\cos\theta}{a+c}$$

Observaciones

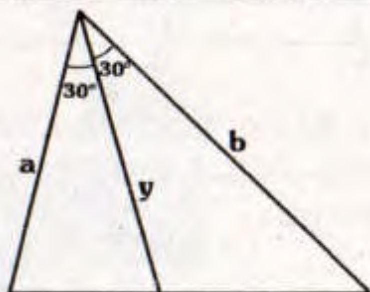
Veamos casos particulares del último teorema:



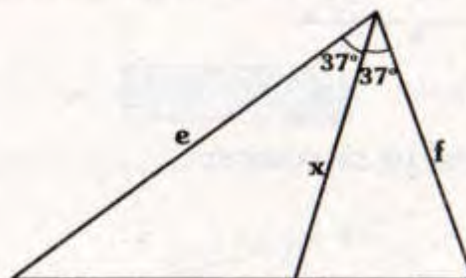
Se cumple: $x = \dfrac{ab}{a+b}\sqrt{2}$



Se cumple: $z = \dfrac{mn}{m+n}$

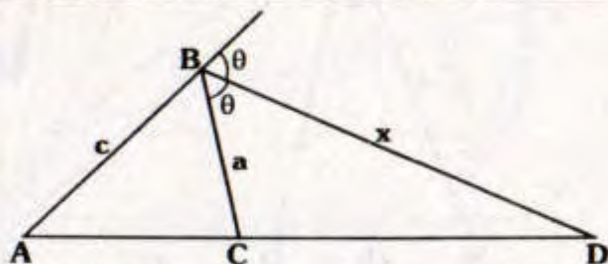


Se cumple: $y = \dfrac{ab}{a+b}\sqrt{3}$



Se cumple: $x = \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{ef}{e+f}\right)$

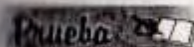
TEOREMA

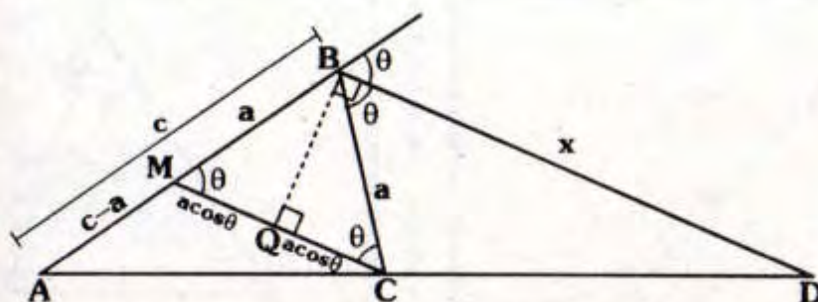


En el gráfico, $\overline{BD}$ es bisectriz exterior.

Se cumple:

$$x = \frac{2ac}{c-a}\cos\theta$$



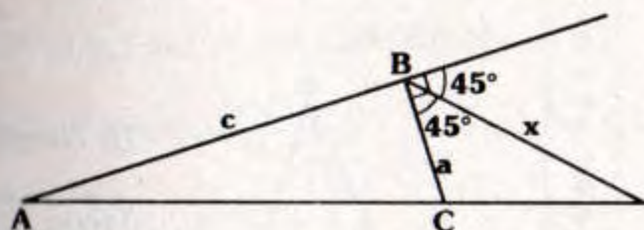


- Como c>a, se ubica M en $\overline{AB}$ tal que $\overline{CM} // \overline{BD} \Rightarrow \Delta MBC$: isósceles (MB=MC)
- $MC = 2a\cos\theta$
- Notemos que: $\Delta ABD \sim \Delta AMC \Rightarrow \dfrac{x}{2a\cos\theta} = \dfrac{c}{c-a}$

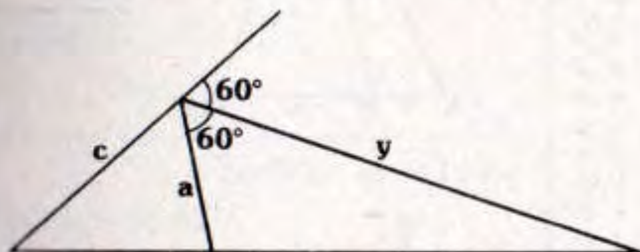
$$\therefore \quad x = \frac{2ac}{c-a}\cos\theta$$

Observaciones

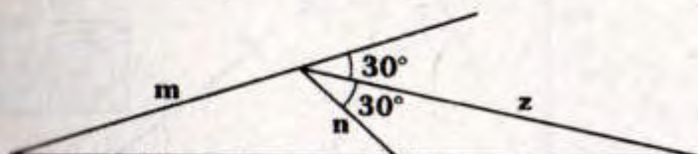
Casos particulares del teorema:



Se cumple: $x = \dfrac{ac}{c-a} \cdot \sqrt{2}$

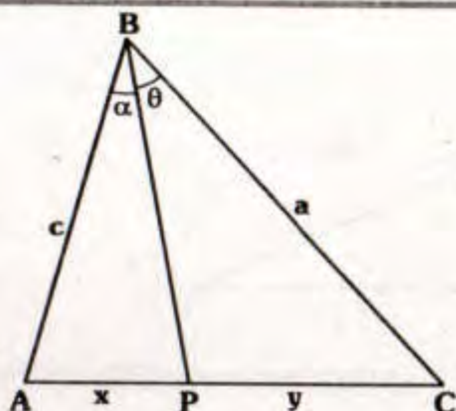


Se cumple: $y = \dfrac{ac}{c-a}$



Se cumple: $z = \dfrac{mn}{m-n}\sqrt{3}$

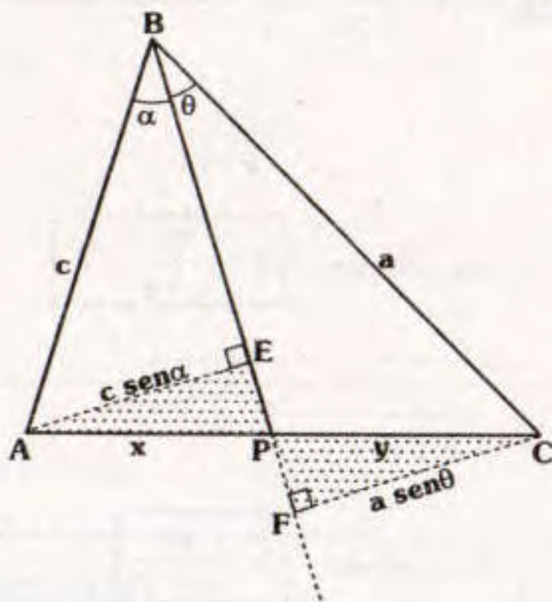
TEOREMA



En el gráfico, se cumple: $\frac{x}{y}=\frac{c\,\text{sen}\alpha}{a\,\text{sen}\theta}$

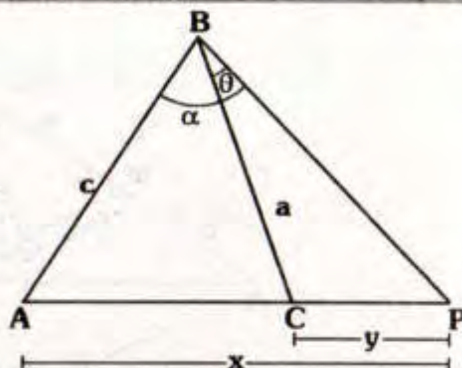
También: $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}=\frac{xa}{yc}$

Prueba



- Se trazan $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares a la recta BP (E y F en $\overleftrightarrow{AP}$)
- En ⊿AEB: AE = csenα
- En⊿BFC: CF = asenθ
- ⊿AEP ~ ⊿CFP ⇒ $\frac{x}{y}=\frac{c\,\text{sen}\alpha}{a\,\text{sen}\theta}$

TEOREMA



En el gráfico, $\overline{BP}$ es ceviana exterior.

Se cumple: $\frac{x}{y}=\frac{c\,\text{sen}\alpha}{a\,\text{sen}\theta}$

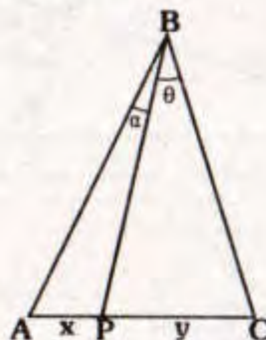
También: $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}=\frac{xa}{yc}$

La prueba es análoga a la anterior.

Observación

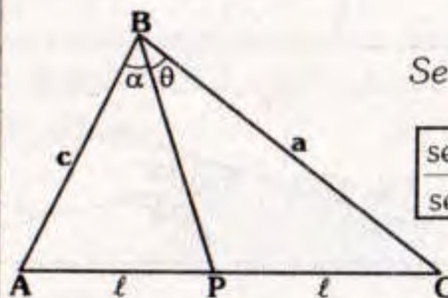
Veamos los casos particulares

- *Si AB=BC*



Se cumple: $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}=\frac{x}{y}$

- *Si* $\overline{BP}$ *es mediana:*



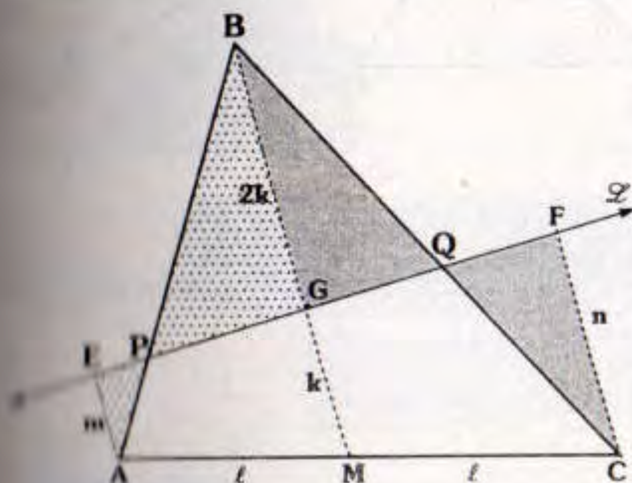
Se cumple: $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}=\frac{a}{c}$

TEOREMA

Una recta pasa por el baricentro G del triángulo ABC y corta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente.

Se cumple: $\frac{AP}{PB}+\frac{CQ}{QB}=1$

Prueba



- Se traza $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ paralelos a $\overline{BM}$.
- $\Delta AEP \sim \Delta BGP \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{m}{2k}$ ...(I)
- $\Delta CFQ \sim \Delta BGQ \Rightarrow \frac{CQ}{QB}=\frac{n}{2k}$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

$$\frac{AP}{PB}+\frac{CQ}{QB}=\frac{m+n}{2k} \quad \text{... (III)}$$

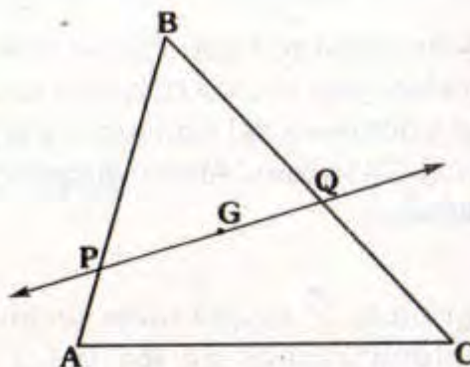
- En el trapecio AEFC:

$$k=\frac{m+n}{2} \Rightarrow m+n=2k \quad \text{... (IV)}$$

- De (III) y (IV):

$$\frac{AP}{PB}+\frac{CQ}{QB}=1$$

Observación



En el gráfico G es baricentro del ΔABC.
Se cumple:

$$\left(\frac{AP}{PB}\right)\left(\frac{CQ}{QB}\right)\le\frac{1}{4}$$

Prueba

- *Usando el resultado anterior:*

$$\frac{AP}{PB}+\frac{CQ}{QB}=1$$

- *Usando:* $MG \le MA$ *para* $\frac{AP}{PB}$ *y* $\frac{CQ}{QB}$

$$\sqrt{\left(\frac{AP}{PB}\right)\left(\frac{CQ}{QB}\right)} \le \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{AP}{PB}+\frac{CQ}{QB}\right)}_{1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AP}{PB}\right)\left(\frac{CQ}{QB}\right)\le\frac{1}{4}$$

La igualdad se cumple cuando:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QB}$$

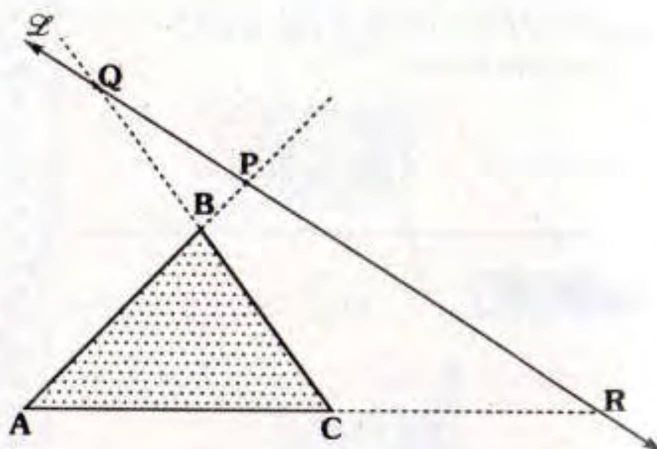
Es decir :

$$\overline{PQ} \,//\, \overline{AC}$$

ESTUDIO DEL TEOREMA DE MENELAO

En la primera parte analizamos el teorema de Menelao, para el caso en que la recta es secante a dos lados del triángulo y a la prolongación del tercero. Ahora veamos otras posibilidades.

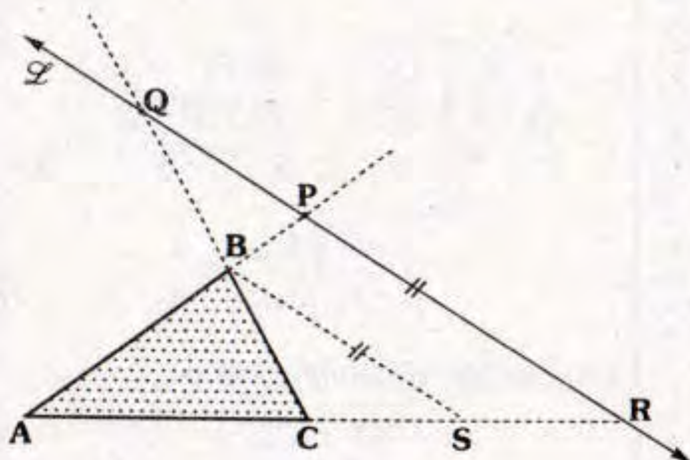
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es una recta secante a las prolongaciones de los lados del triángulo.



Se cumple:

$$(AP)(BQ)(CR) = (PB)(QC)(RA) \text{ o también: } \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Prueba



– Ubicamos S en $\overline{CR}$ tal que $\overline{BS} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

– Por teorema de Tales, en:

• ΔAPR, con $\overline{BS} // \overline{PR}$: $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AR}{RS}$ ... (I)

• ΔCQR, con $\overline{BS} // \overline{QR}$: $\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{SR}{RC}$ ... (II)

– De (I) y (II):

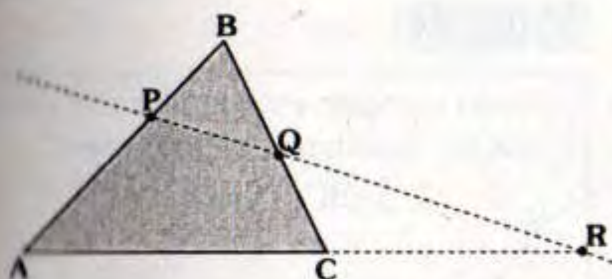
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}=\frac{AR}{\cancel{RS}}\cdot\frac{\cancel{SR}}{RC}$$

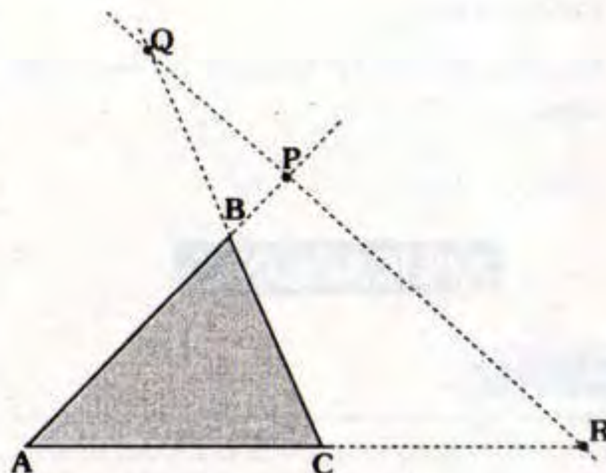
$$\Rightarrow \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

RECÍPROCO DEL TEOREMA DE MENELAO

Una de las aplicaciones muy importantes para el análisis de la colinealidad es los recíprocos del teorema de Menelao y Ceva.

Veamos el recíproco en ambos casos:





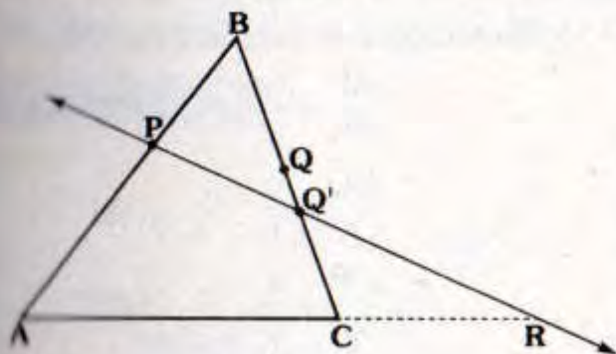
En ambos casos, se cumple:

$$\text{Si } \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1 \Rightarrow \text{P, Q y R son colineales}$$

Prueba

Ambos casos se prueba en forma análoga.

Veamos el **primer caso**, supongamos que P, Q y R no son colineales y la recta que pasa por P y R corta a $\overline{BC}$ en Q'.



– Por hipótesis:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{AR}{RC}=1 \quad \text{... (I)}$$

– Por teorema de Menelao:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ'}{Q'C}\cdot\frac{AR}{RC}=1 \quad \text{... (II)}$$

– De (I) y (II):

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{BQ'}{Q'C} \Rightarrow \frac{BQ}{BQ+QC}=\frac{BQ'}{BQ'+Q'C}$$

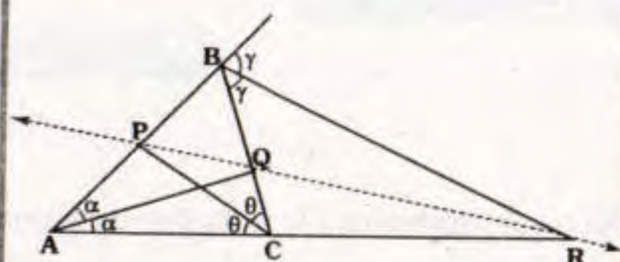
- Luego $BQ = BQ'$, por axioma de la construcción de un segmento (*ver pág. Nº 8, del libro de congruencia de triángulos*), deducimos que $Q = Q'$.
- Por lo tanto P, Q y R están en una misma recta.
- Análogamente se prueba el segundo caso.

APLICACIONES

TEOREMA

En todo triángulo los pies de dos bisectrices interiores y el pie de la bisectriz exterior trazada del tercer vértice, son colineales.

Si $AB \neq BC$



Se cumple:

P, Q y R son colineales

Prueba

- Sea AB=c; BC=a y AC=b
- Por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{b}{a} \quad ... (I)$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{c}{b} \quad ... (II)$$

- Por teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{CR}{RA}=\frac{a}{c} \quad ... (III)$$

- De (I), (II) y (III):

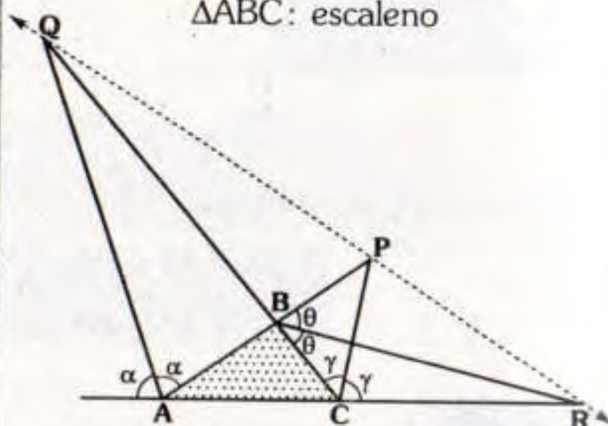
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$$

$\therefore$ P, R y Q colineales.

TEOREMA

En todo triángulo escaleno los pies de las bisectrices exteriores son colineales.

ΔABC: escaleno



En el gráfico, P, Q y R son colineales.

Prueba

- Sea AB=c; BC=a y AB=c
- Por teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{b}{a} \quad ... (I)$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{c}{b} \quad ... (II)$$

$$\frac{CR}{RA}=\frac{a}{c} \quad ... (III)$$

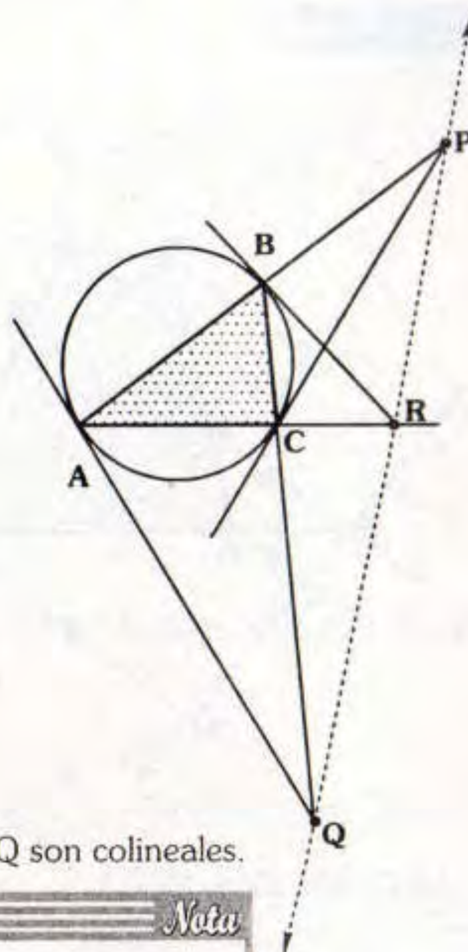
- De (I), (II) y (III): $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$
- Por el recíproco del segundo caso del Teorema de Menelao: P, Q y R son colineales.

TEOREMA

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia y el triángulo ABC es escaleno.

Se cumple:

P, Q y R son colineales



Prueba

- Sea AB=c; BC=a y AC=b

  Por teorema:

  $$\frac{AP}{PB}=\frac{b^2}{a^2} \quad \text{... (I)} \qquad \frac{BQ}{QC}=\frac{c^2}{b^2} \quad \text{... (II)}$$

  $$\frac{CR}{RA}=\frac{a^2}{c^2} \quad \text{... (III)}$$

- De (I), (II) y (III): $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{c^2}{b^2}\cdot\dfrac{a^2}{c^2}=1$

- Por el recíproco del segundo caso de Menelao, P, R y Q son colineales.

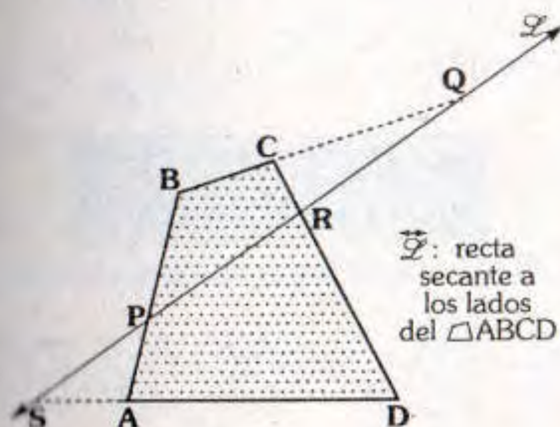
Nota

La recta que contiene a dichos puntos se denomina recta de Lemoine.

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE MENELAO PARA POLÍGONOS

Hemos analizado el teorema de Menelao, para el caso del triángulo, veamos ahora para el cuadrilátero, pentágono y en general para todo polígono

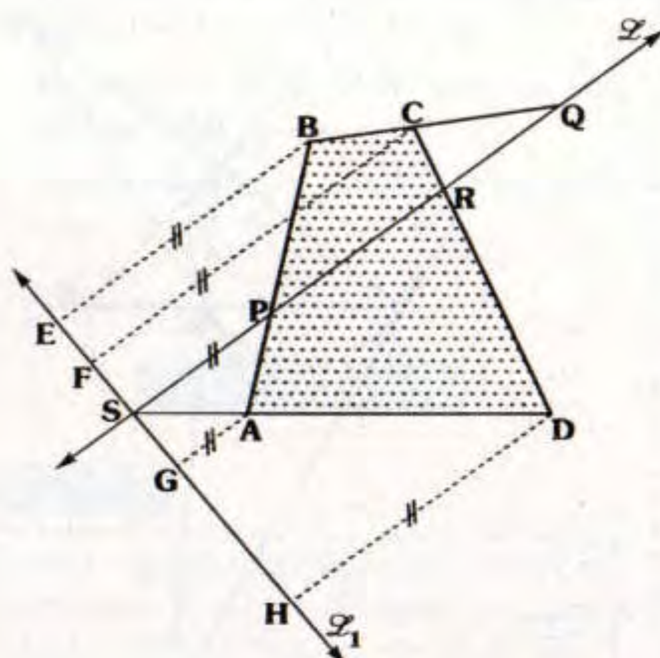
En el cuadrilátero



Se cumple:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

Prueba



- Por S trazamos una recta arbitraria, se trazan $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, $\overline{AG}$ y $\overline{DH}$ paralelas a la recta $\mathscr{L}$. (E, F, S, G y H en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$)
- Por teorema de Tales:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{GS}{SE} \quad \ldots \text{(I)}$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{ES}{SF} \quad \ldots \text{(II)}$$

$$\frac{CR}{RD}=\frac{FS}{SH} \quad \ldots \text{(III)}$$

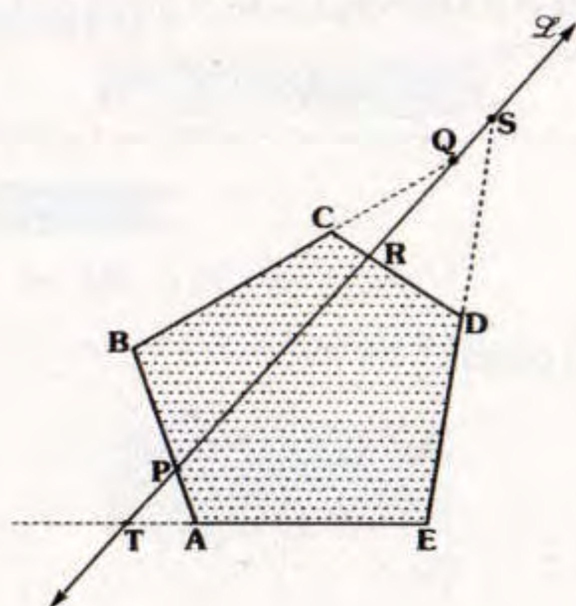
$$\frac{DS}{SA}=\frac{HS}{SG} \quad \ldots \text{(IV)}$$

- De (I), (II), (III) y (IV):

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

Mostremos el caso del pentágono de forma ilustrativa, demostraremos luego el caso general. En el pentágono.

En el pentágono



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es una recta secante a todos los lados.

Se cumple:

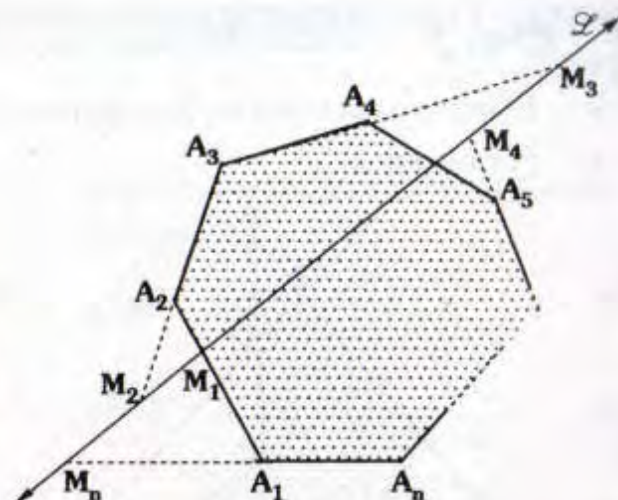
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

En general

Sea $A_1A_2A_3...A_n$ un polígono y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ una recta secante a todos los lados.

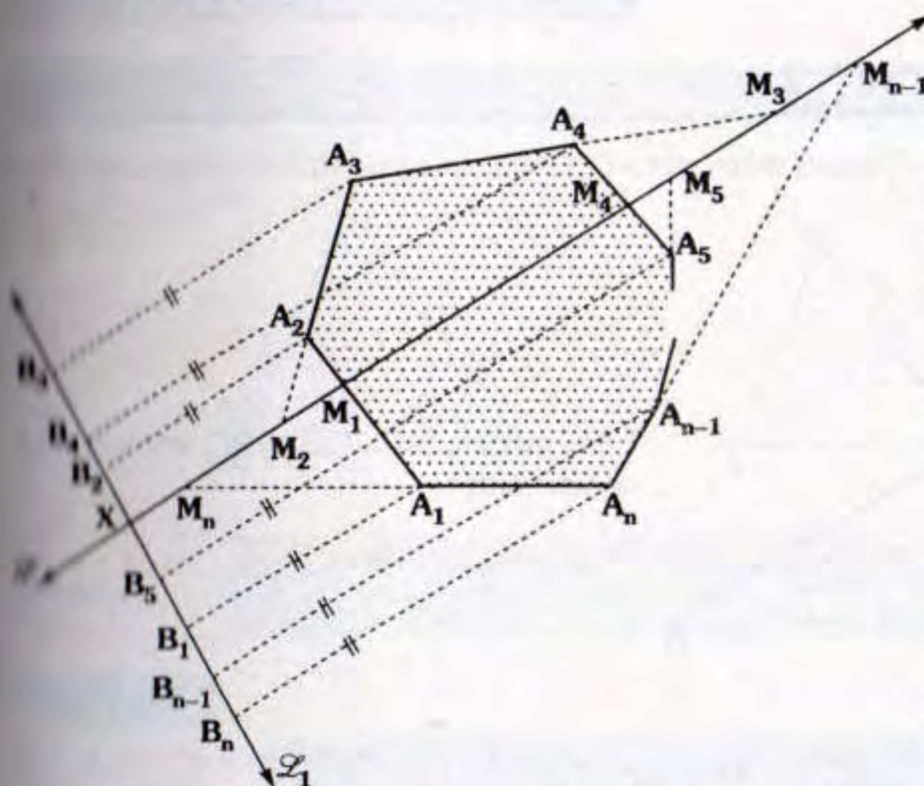
Se cumple:

$$\frac{A_1M_1}{M_1A_2}\cdot\frac{A_2M_2}{M_2A_3}\cdot\frac{A_3M_3}{M_3A_4}\cdots\frac{A_{n-1}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nM_n}{M_nA_1}=1$$



Prueba

- Se ubica X en $\mathscr{L}$ y se traza la recta $\mathscr{L}_1$, se trazan $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ... $\overline{A_nB_n}$ tal que $\overline{A_iB_i} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (i=1, ..., n) con $B_i \in \mathscr{L}_1$.



- Por teorema de Tales:

$$\frac{A_1M_1}{M_1A_2}=\frac{B_1X}{XB_2} \quad ...(1)$$

$$\frac{A_2M_2}{M_2A_3}=\frac{B_2X}{XB_3} \quad ...(2)$$

$$\frac{A_3M_3}{M_3A_4}=\frac{B_3X}{XB_4} \quad ...(3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_{n-1}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n}=\frac{B_{n-1}X}{XB_n} \quad ...(n-1)$$

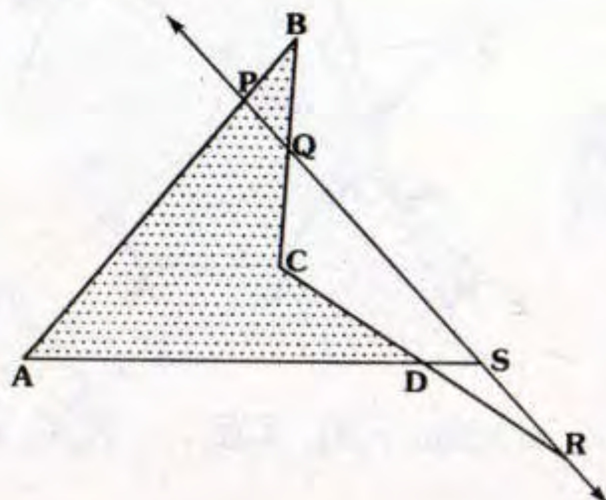
$$\frac{A_nM_n}{M_nA_1}=\frac{B_nX}{XB_1} \quad ...(n)$$

- Multiplicando las expresiones (1), (2), (3), ..., (n)

$$\frac{A_1M_1}{M_1A_2}\cdot\frac{A_2M_2}{M_2A_3}\cdot\frac{A_3M_3}{M_3A_4}\cdots\frac{A_{n-1}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nM_n}{M_nA_1}=\frac{B_1X}{XB_2}\cdot\frac{B_2X}{XB_3}\cdot\frac{B_3X}{XB_4}\cdots\frac{B_{n-1}X}{XB_n}\cdot\frac{BnX}{XB_1}=1$$

Nota

- *El teorema anterior se cumple para todo polígono (convexo y no convexo).*
- *Por ejemplo:*

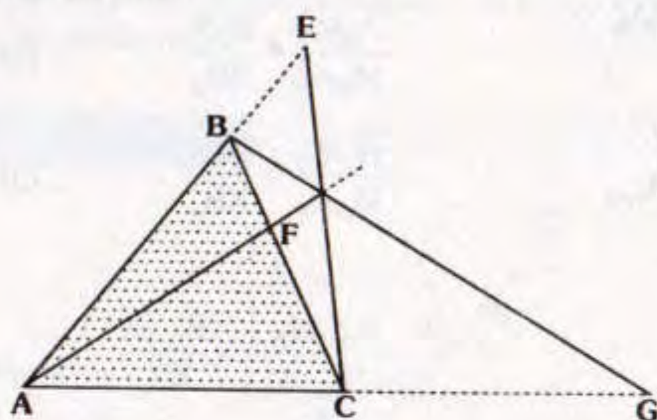


En el gráfico, se cumple:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

ESTUDIO DEL TEOREMA DE CEVA

Veremos aquí una segunda posibilidad del teorema de Ceva, así como su forma trigonométrica y aplicaciones.



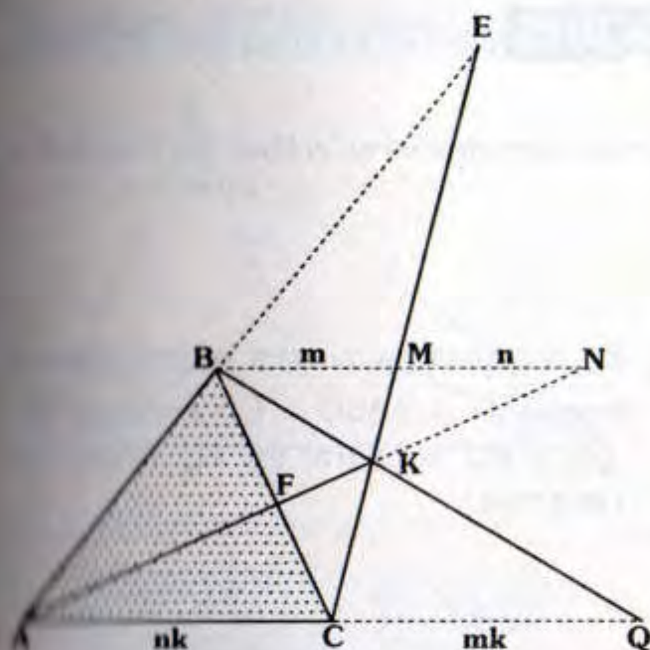
En el gráfico, $\overline{AF}$, $\overline{CE}$ y $\overline{BG}$ son cevianas concurrentes.

Se cumple:

$$(AE)(BF)(CG)=(EB)(FC)(GA) \text{ ó } \frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

Prueba

Se puede proceder análogamente como en el primer caso, pero optemos por el siguiente método:

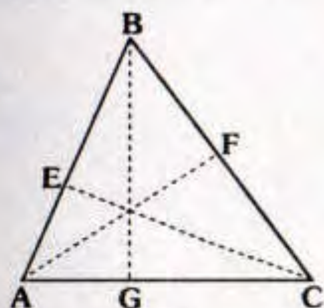


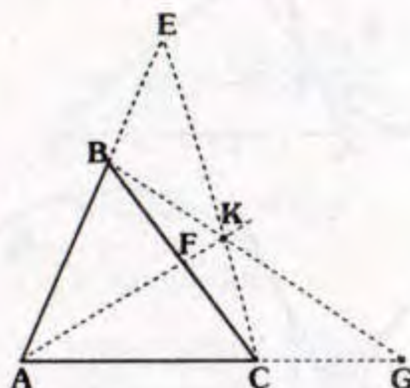
- Por B se traza la paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{EC}$ en M y a la prolongación de $\overline{AF}$ en N.
- Sea BM=m y MN = n $\Rightarrow$ AC=nk y CQ=mk
- $\Delta AEC \sim \Delta BEM$: $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{nk}{m}$ ... (I)
- $\Delta BFN \sim \Delta CFA$: $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{m+n}{nk}$ ... (II)
- Notemos: $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{mk}{(m+n)k}$ ... (III)

De (I), (II) y (III): $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$

RECÍPROCO DEL TEOREMA DE CEVA

Ambos casos son similares





Se cumple: Si $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GA}=1 \Rightarrow$ $\overline{AF}$, $\overline{CE}$ y $\overline{BG}$ son concurrentes

Prueba

Para la prueba, optenemos por el método del absurdo, para ello tracemos las cevianas $\overline{BG}$ y $\overline{CE}$ secantes en K y supongamos que la recta AK corta a $\overline{BC}$ en F'.

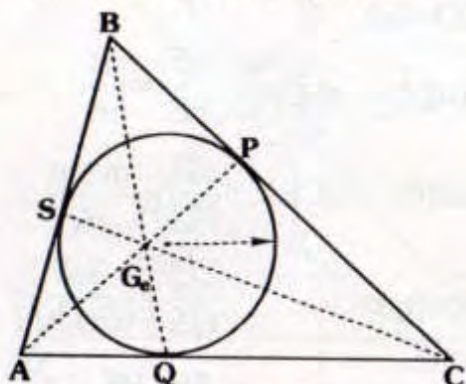
Por teorema de Ceva: $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF'}{F'C}\cdot\dfrac{CG}{GA}=1$ Por condición: $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GA}=1$

De donde: $\dfrac{BF'}{F'C}=\dfrac{BF}{FC} \Rightarrow F'=F$

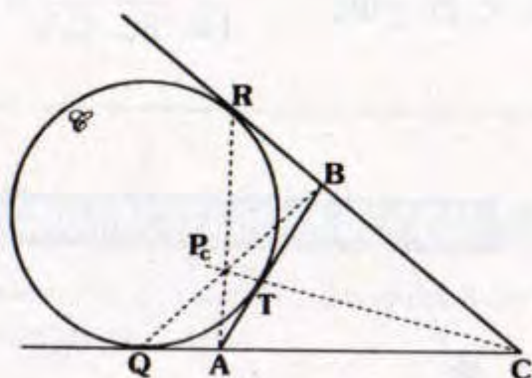
APLICACIONES

TEOREMA

Los siguientes teoremas sobre concurrencias fueron demostrados en el libro de "Puntos Notables", sólo los mencionaremos:

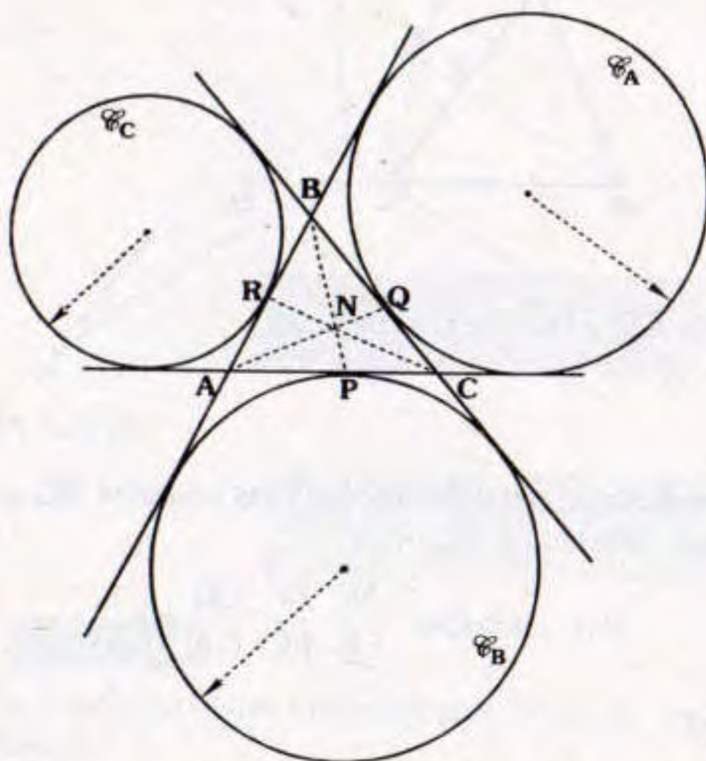


En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita en el ΔABC. Las cevianas $\overline{AP}$, $\overline{CS}$ y BQ concurre en G_e (Punto de Gergonne).



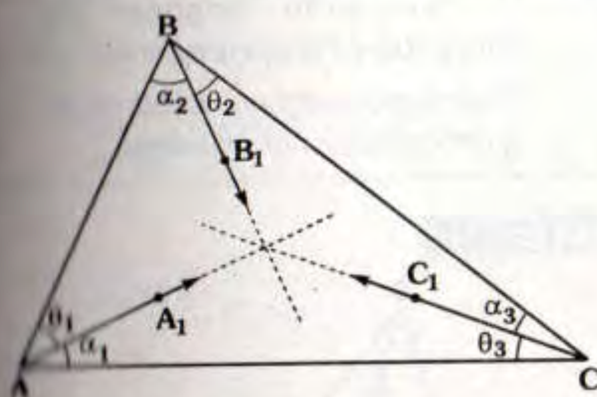
$\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AB}$.

Las cevianas $\overline{BQ}$, $\overline{AR}$ y $\overline{CT}$ concurren en el punto P_c (*Punto de Poncelet*).



- $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ y $\mathscr{C}_C$ son las circunferencias exinscritas respecto del ΔABC.
- $\overline{AQ}$, $\overline{CR}$ y $\overline{BP}$ concurren en el punto N (Punto de Nagel).

TEOREMA DE CEVA TRIGONOMÉTRICO



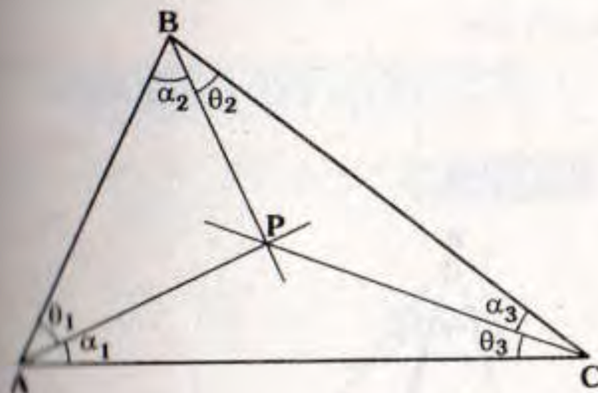
En el gráfico, se cumple:

$\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ y $\overrightarrow{CC_1}$ concurren

$\Leftrightarrow \dfrac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\theta_1}\dfrac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\theta_2}\dfrac{\text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\theta_3}=1$

Prueba

- Veamos la ida ($\Rightarrow$)



- Sea P el punto de concurrencia, por Ley de senos, en:

$$\Delta APC: \frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\theta_3}=\frac{PC}{PA} \quad \text{... (I)}$$

$$\Delta CPB: \frac{\text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\theta_2}=\frac{PB}{PC} \quad \text{... (II)}$$

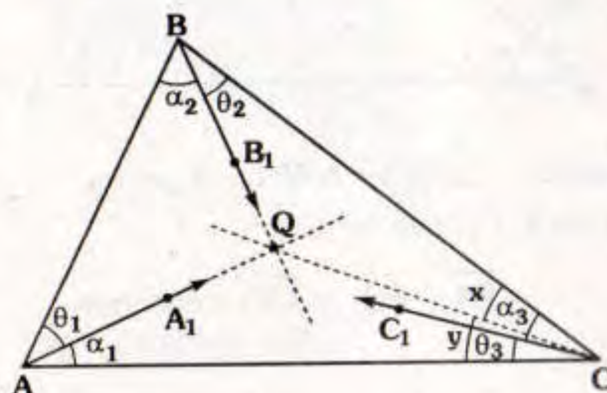
$$\Delta BPA: \frac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\theta_1}=\frac{PA}{PB} \quad \text{... (III)}$$

- De (I), (II) y (III):

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\theta_3}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\theta_2}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\theta_1}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PA}{PB}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\theta_1}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\theta_2}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\theta_3}=1$$

- Analicemos la vuelta ($\Leftarrow$)



- Sea $\overrightarrow{AA_1}\cap\overrightarrow{BB_1}=\{Q\}$, $m\measuredangle BCQ = x$ y $m\measuredangle QCA = y$

  Notemos: $\alpha_3+\theta_3=x+y$

- Por condición:

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\theta_1}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\theta_2}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\theta_3}=1 \quad \text{... (a)}$$

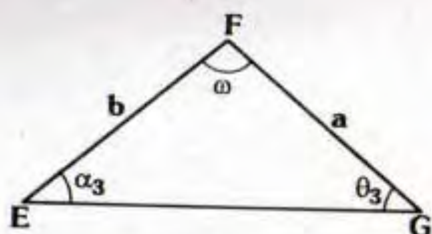
- Por teorema:

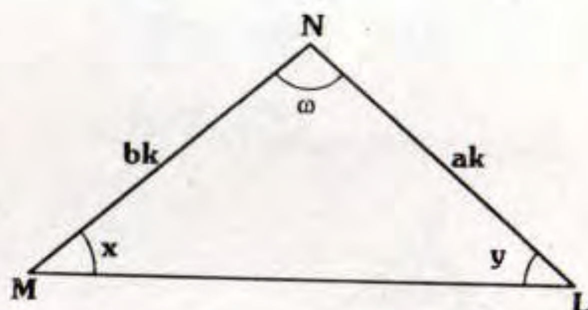
$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{\text{sen}\theta_1}\cdot\frac{\text{sen}\alpha_2}{\text{sen}\theta_2}\cdot\frac{\text{sen}x}{\text{sen}y}=1 \quad \text{... (b)}$$

- De (a) y (b):

$$\frac{\text{sen}\alpha_3}{\text{sen}\theta_3}=\frac{\text{sen}x}{\text{sen}y} \quad \text{... (c)}$$

Y como $\alpha_3+\theta_3=x+y$. Construimos los siguientes triángulos.





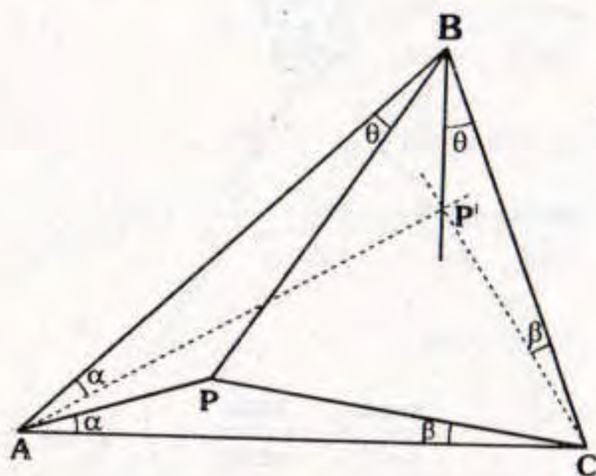
Luego: $\Delta EFG \sim \Delta MNL \Rightarrow x = \alpha_3$
es decir C_1 está en $\overline{CQ}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ y $\overleftrightarrow{CC_1}$ concurren

APLICACIONES

TEOREMA

Si tres cevianas concurren respecto a un triángulo, entonces sus isogonales también concurren:

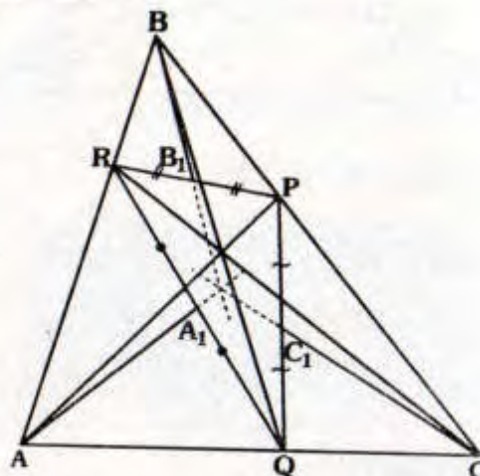


La prueba es directa, los puntos P y P' se llaman conjugados isogonales.

Nota

- *El conjugado isogonal del ortocentro es el circuncentro.*
- *El conjugado isogonal del baricentro se denomina punto simediano.*

TEOREMA



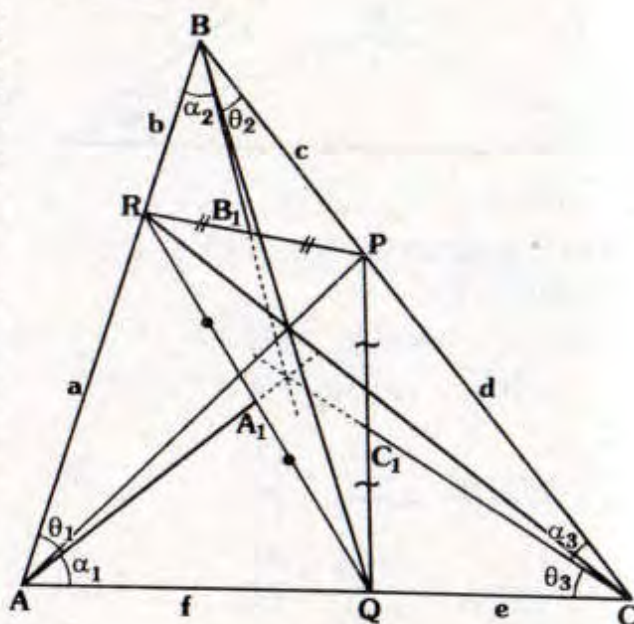
En el gráfico:

$RA_1 = A_1Q$, $QC_1 = C_1P$ y $PB_1 = B_1R$

Se cumple:

$\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ y $\overleftrightarrow{CC_1}$ concurren

Prueba



- Demostraremos que se cumple el teorema de Ceva trigonométrico.
- Por teorema (*pág. Nº 47*)

$$\Delta ARC: \frac{sen\alpha_1}{sen\theta_1}=\frac{a}{f} \quad ...(I)$$

$$\Delta RBP: \frac{sen\alpha_2}{sen\theta_2}=\frac{c}{b} \quad ...(II)$$

$$\Delta CPQ: \frac{sen\alpha_3}{sen\theta_2}=\frac{e}{d} \quad ...(III)$$

- De (I), (II) y (III):

$$\frac{sen\alpha_1}{sen\theta_1}\cdot\frac{sen\alpha_2}{sen\theta_2}\cdot\frac{sen\alpha_3}{sen\theta_3}=\frac{a}{f}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{e}{d} \quad ...(IV)$$

- Por teorema de Ceva:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1 \quad ...(V)$$

- De (IV) y (V):

$$\frac{sen\alpha_1}{sen\theta_1}\cdot\frac{sen\alpha_2}{sen\theta_2}\cdot\frac{sen\alpha_3}{sen\theta_3}=1$$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ y $\overleftrightarrow{CC_1}$ concurren.

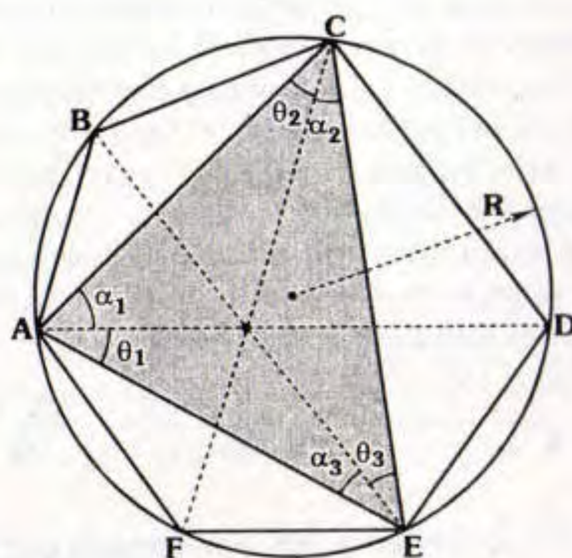
TEOREMA

ABCDEF es un hexágono inscrito, se cumple: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.

Concurren si y solo si:

$$(AB)(CD)(EF)=(BC)(DE)(AF)$$

Prueba



- Analicemos el ΔACE.
- Por propiedad:

$AB=2Rsen\alpha_3$; $BC=2Rsen\theta_3$;

$CD=2Rsen\alpha_1$; $DE=2Rsen\theta_1$;

$EF=2Rsen\alpha_2$ y $FA=2Rsen\theta_2$

- <u>En ΔACE</u>:

$\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ concurren si y solo sí:

$$\underbrace{\frac{sen\alpha_1}{sen\theta_1}}\cdot\underbrace{\frac{sen\alpha_2}{sen\theta_2}}\cdot\underbrace{\frac{sen\alpha_3}{sen\theta_3}}=1$$

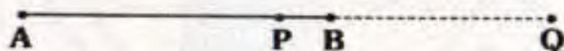
$$\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AB}{BC}=1$$

- Luego se puede escribir así:
- $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ concurren si y solo si:

$$(CD)(EF)(AB)=(DE)(FA)(BC)$$

DIVISIÓN ARMÓNICA

Es una de las herramientas más importantes en la resolución de problemas de Olimpiadas matemáticas y algunos ejercicios preuniversitarios. Estamos considerando por cuestiones prácticas la razón de segmentos como la razón de sus longitudes (en geometría moderna se plantea adecuadamente como la razón de segmentos dirigidos)



Si P y Q dividen a $\overline{AB}$ en la misma razón, es decir: $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$, entonces se dice que P y Q dividen armónicamente a $\overline{AB}$.

También:

* P y Q son conjugados armónicos de $\overline{AB}$.
* A, P, B y Q determinan una CUATERNA ARMÓNICA.
* B y A son conjugados armónicos de $\overline{QP}$.

TEOREMA DE DESCARTES

Si: $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$



Se cumple:

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}$$

Demostración

Como:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{PB}{AP}=\frac{QB}{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB-AP}{AP}=\frac{AQ-AB}{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AP}-1=1-\frac{AB}{AQ}$$

Luego:

$$AB\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}\right)=2$$

$$\therefore \frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}$$

Nota

– *Como B y A son conjugados armónicos de $\overline{QP}$, se cumple:*

$$\frac{1}{QB}+\frac{1}{QA}=\frac{2}{QP}$$

– *Juntando, ambas expresiones:*

$$\frac{1}{AP}+\frac{2}{QP}=\frac{1}{QB}+\frac{2}{AB}$$

– *El teorema también es recíproco*

$$\text{Si: } \frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$$

TEOREMA DE NEWTON

Si: $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$ y AM=MB



Se cumple:

$$(AM)^2=(MB)^2=(MP)(MQ)$$

Prueba

- Como $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$
- Sea AM=MB=x

$$\Rightarrow \frac{x+MP}{x-MP}=\frac{x+MQ}{MQ-x}$$

- Por razones y proporciones:

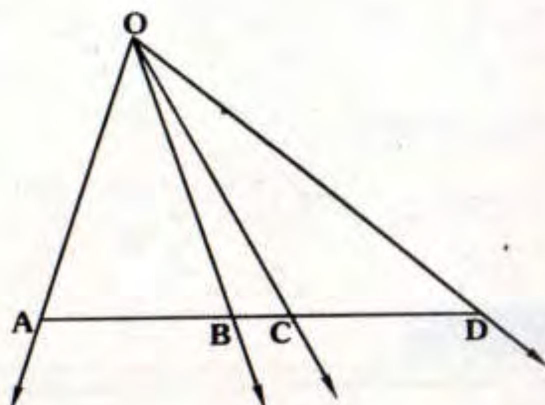
$$\frac{(x+MP)+(x-MP)}{(x+MP)-(x-MP)}=\frac{(x+MQ)+(MQ-x)}{(x+MQ)-(MQ-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{MP}=\frac{MQ}{x}$$

$$\therefore\ x^2=(MP)(MQ)$$

HAZ ARMÓNICO

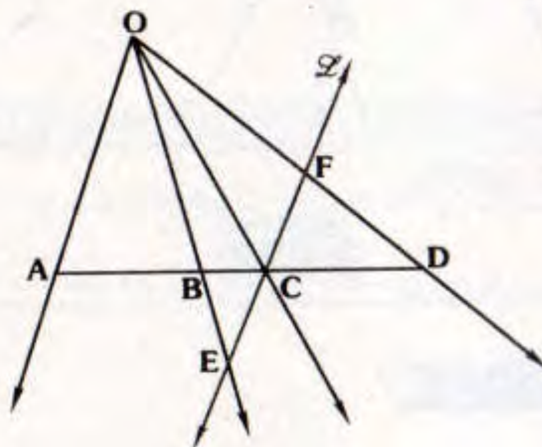
Sea A, B, C y D una cuaterna armónica y el punto O no está en la recta que contiene a dichos puntos, la unión de los rayos OA, OB, OC y OD se llama HAZ ARMÓNICO.



Si: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ forman un haz armónico.

TEOREMA

Si : $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AO}$



Se cumple: $CF=CE$

Prueba

- $\Delta AOD \sim \Delta CFD \Rightarrow \frac{AO}{CF}=\frac{AD}{CD}$ ... (1)
- $\Delta ABO \sim \Delta CBE \Rightarrow \frac{AO}{CE}=\frac{AB}{BC}$ ... (2)

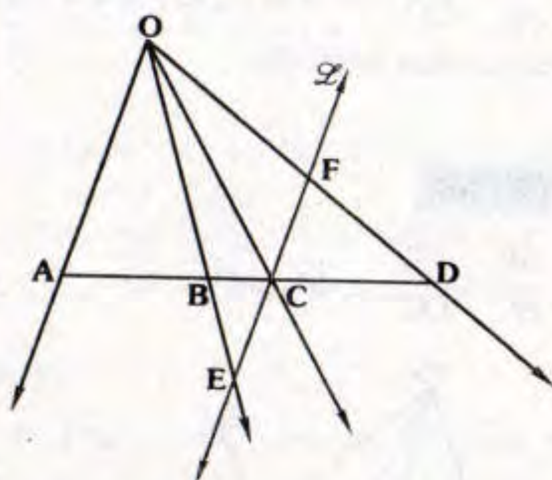
– De (1) y (2): $\frac{AO}{CF}=\frac{AO}{CE} \Rightarrow CF=CE$

También es cierto:

Si CF=CE y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AO} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$

TEOREMA

Si: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ y EC=CF



Se cumple:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AO}$

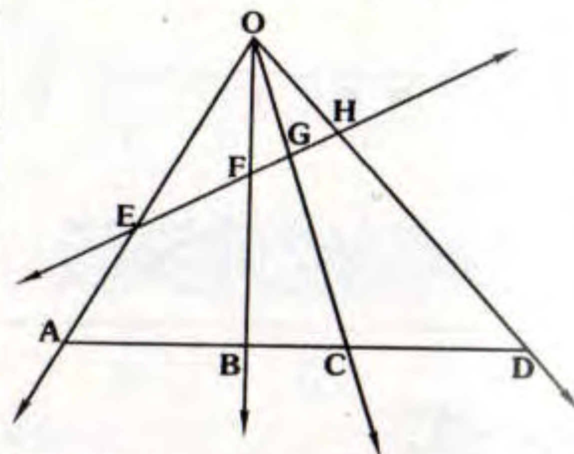
Prueba

- Supongamos que no son paralelas.
- Se traza por C una recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}'$ paralela a $\overline{AO}$ que corta a la prolongación de $\overline{OB}$ en E' y a $\overline{OD}$ en F', por teorema E'C = CF'.
- $\Delta ECE' \cong \Delta FCF'$, luego: $\overline{EB} \parallel \overline{FD}$ lo cual es contradicción.

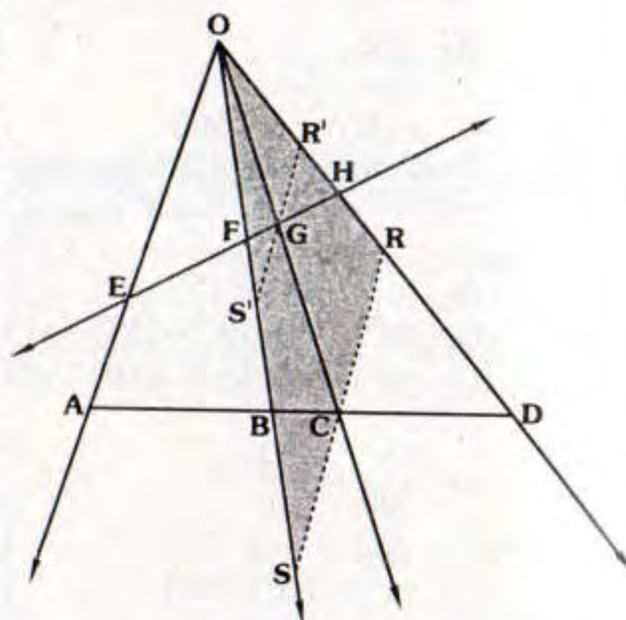
$\therefore\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{AO}$

TEOREMA

Si: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{EF}{FG}=\frac{EH}{HG}$



Prueba

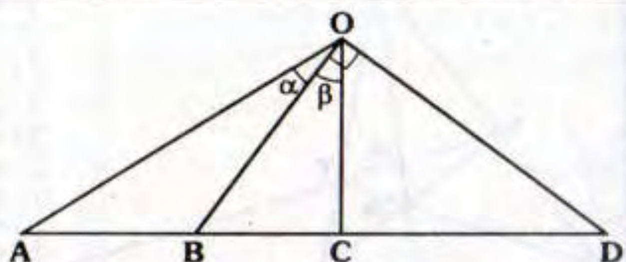


- Por C y G se trazan las paralelas a $\overline{AO}$.
- Como $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow SC=CR$
- $\Delta SOR \sim \Delta S'OR' \Rightarrow S'G = GR'$
- Como $S'G = GR' \Rightarrow \frac{EF}{FG}=\frac{EH}{HG}$

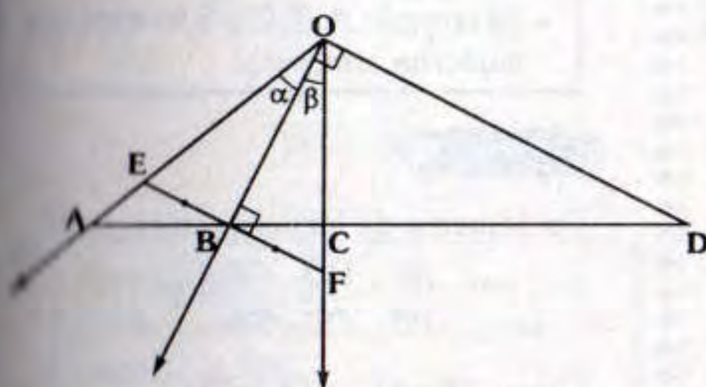
TEOREMA

Si: $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$ y $m\measuredangle BOD=90^\circ$

$\Rightarrow$ $\alpha=\beta$



Prueba



– Se traza la paralela a $\overline{OD}$ por B como $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$ por teorema:

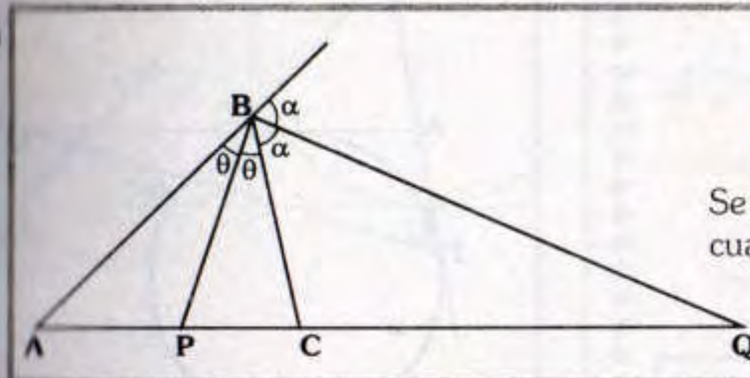
$$EB=BF$$

– ΔEOF : isósceles $\Rightarrow$ $\alpha=\beta$

CASOS COMUNES DE CUATERNAS ARMÓNICAS

Daremos algunos casos frecuentes de las cuaternas armónicas, demostraremos algunos y otros lo dejaremos como ejercicio para el lector.





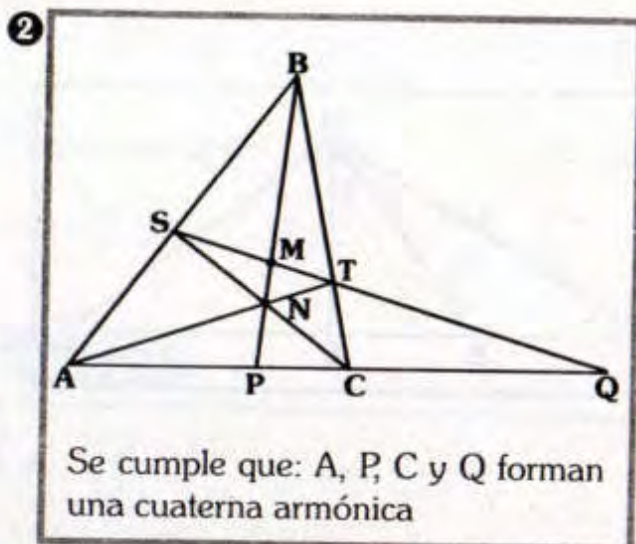
Se cumple: A, P, C y Q forman una cuaterna armónica.

Prueba

En el ΔABC, por teorema de la bisectriz interior y exterior, tendremos:

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AB}{BC} \quad y \quad \frac{AQ}{QC}=\frac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QC}$$

❷



Se cumple que: A, P, C y Q forman una cuaterna armónica

Prueba

En el ΔABC:

– Teorema de Menelao:

$$\frac{AS}{SB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CQ}{QA} \quad \ldots (I)$$

– Teorema de Ceva:

$$\frac{AS}{SB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CP}{PA} \quad \ldots (II)$$

De (I) y (II):

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{CP}{PA}$$

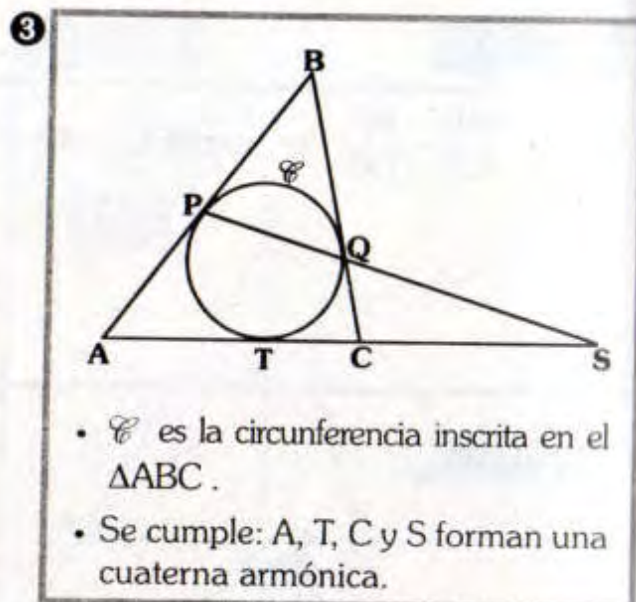
$$\therefore \quad \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QC}$$

Observación

En el último gráfico, también hay cuaterna armónica, en:

* S, M, T y Q
* B, M, N y P

❸



- $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el ΔABC.
- Se cumple: A, T, C y S forman una cuaterna armónica.

Prueba

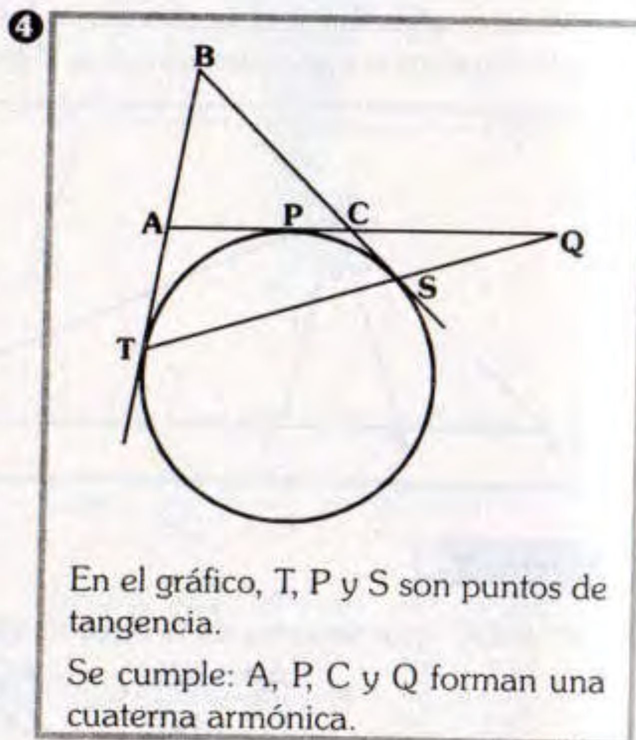
– Por teorema de Menelao en el ΔABC

$$\frac{AP}{\cancel{PB}}\cdot\frac{\cancel{BQ}}{QC}\cdot\frac{CS}{SA}=1$$

– Como AP=AT y QC=TC

$$\Rightarrow \quad \frac{AT}{TC}\cdot\frac{CS}{AS} \quad \Rightarrow \quad \frac{AT}{TC}=\frac{AS}{SC}$$

❹



En el gráfico, T, P y S son puntos de tangencia.

Se cumple: A, P, C y Q forman una cuaterna armónica.

Prueba

- En el ΔABC, por el segundo caso del teorema de Menelao:

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

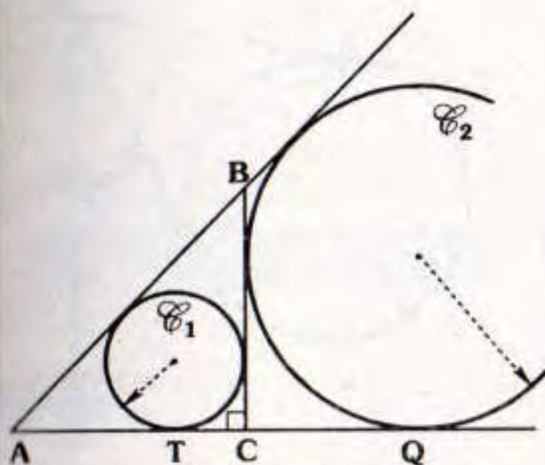
- Como: $AT=AP$ y $SC=PC$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\therefore \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QC}$$

5

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son la circunferencia inscrita y exinscrita respecto al ΔABC.



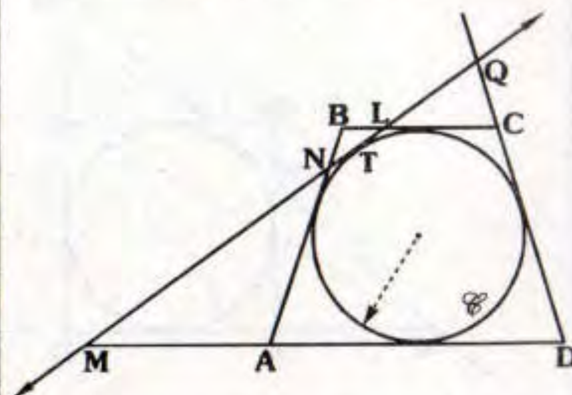
Se cumple:

A, T, C y Q forman una cuaterna armónica.

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

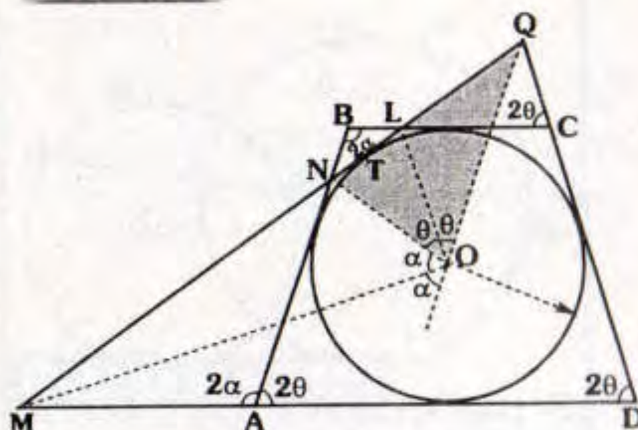
6

En el gráfico, $\overline{AD}//\overline{BC}$ y $AB=CD$, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el trapecio ABCD y T es punto de tangencia.



Se cumple que M, N, L y Q forman una cuaterna armónica.

Prueba



- Sea $m\measuredangle MAB=2\alpha$ y $m\measuredangle BAD=2\theta$

$$\Rightarrow \alpha+\theta=90°$$

- Para el ΔAMN : O es excentro

$$\Rightarrow m\measuredangle MON=\alpha$$

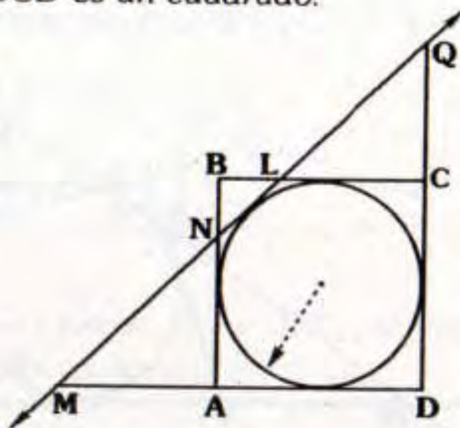
- Para el ΔLCQ : O es excentro

$$\Rightarrow m\measuredangle LOQ=\theta$$

- Para el ΔNBL : $m\measuredangle NOL=90°-\alpha=\theta$
- En el ΔNOQ : $\overline{OL}$ y $\overline{OM}$ son bisectriz interior y exterior.

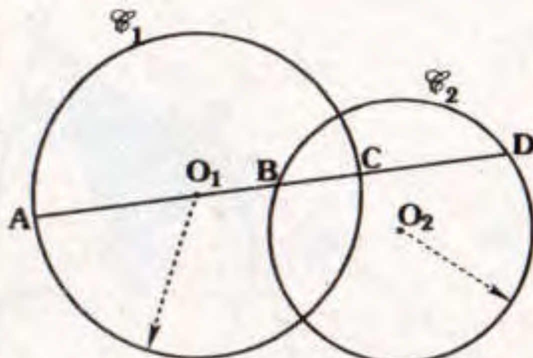
Observación

El teorema anterior es válido si ABCD es un cuadrado.



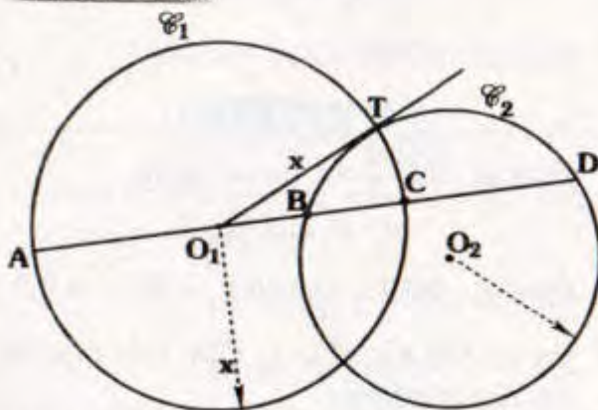
Se cumple que: M, N, L *y* Q *forman una cuaterna armónica.*

7 En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias ortogonales.



Se cumple que A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

Prueba



Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales entonces $\overline{O_1T}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$.

Sea $AC = 2x$

Por teorema de la tangente: $x^2 = (O_1B)(O_1D)$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{O_1B} = \frac{O_1D}{x}$$

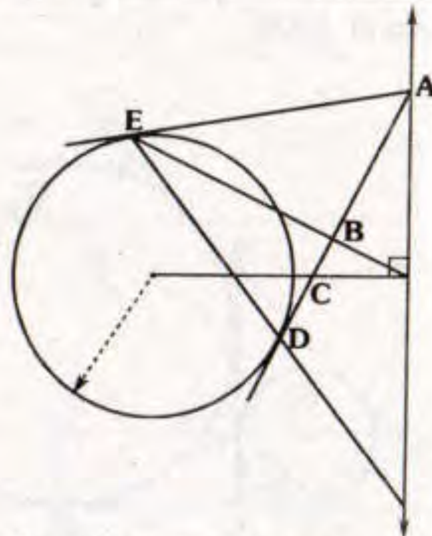
$$\Rightarrow \quad \frac{x + O_1B}{x - O_1B} = \frac{O_1D + x}{O_1D - x}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

Nota

Los siguientes casos quedan como ejercicio para el lector:

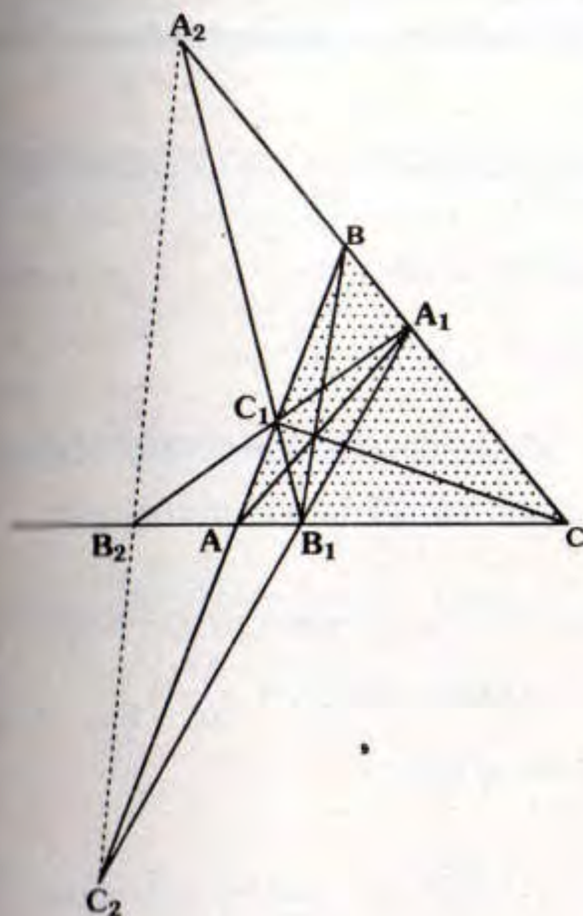
*1



E *y* D *son puntos de tangencia entonces* A, B, C *y* D *forman una cuaterna armónica.*

*2 *Para el* ΔABC, H *es ortocentro,* G *es baricentro,* O *es circuncentro y* O_9, *es el centro de la circunferencia de los nueve puntos. Se cumple que* **H**, **G**, $\mathbf{O_9}$ *y* **O** *forman una cuaterna armónica.*

TEOREMA



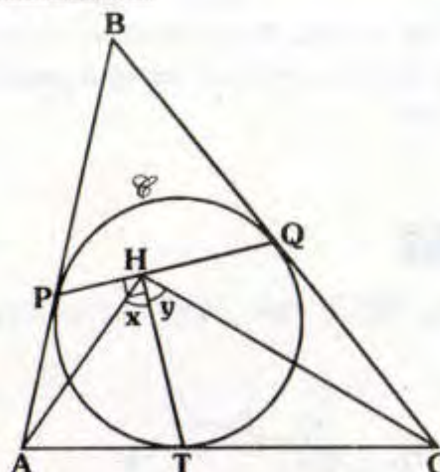
En el gráfico, se cumple:

A_2, B_2 y C_2 son colineales

Prueba

- Basta notar que B_2, A, B_1 y C es una cuaterna armónica entonces el conjunto de rayos $\overrightarrow{C_2B_2}$, $\overrightarrow{C_2A}$, $\overrightarrow{C_2B_1}$ y $\overrightarrow{C_2C}$ forman un haz armónico.
- Como C, A_1, B y A_2 forman una cuaterna armónica entonces $\overleftrightarrow{C_2B_2}$ pasa por A_2.

TEOREMA



En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita.

Se cumple: $x = y$

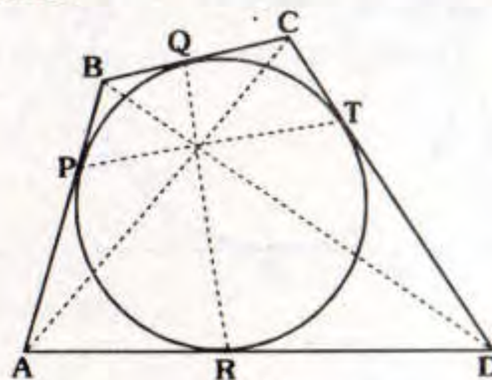
Prueba

- Si $\overline{PQ} // \overline{AC}$ es obvio.
- Si $\overline{PQ} \not\parallel \overline{AC}$, la prolongación de $\overline{QB}$ corta a $\overleftarrow{CA}$ en M, entonces: M, A, T y C forma una cuaterna armónica, como $m\measuredangle MHT = 90^\circ$ entonces por teorema:

$$x=y$$

TEOREMA DE NEWTON

En el gráfico, el cuadrilátero ABCD es circunscrito.



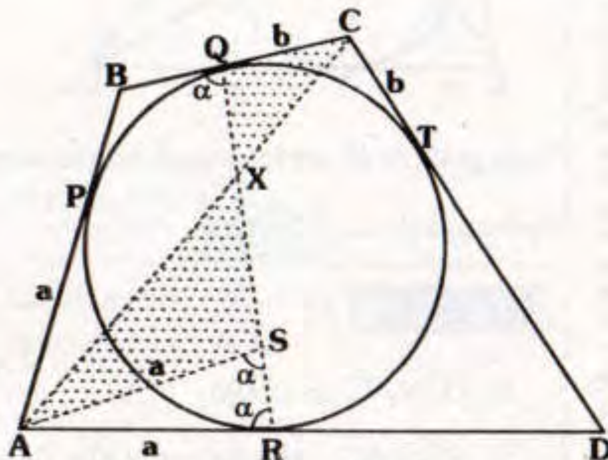
Se cumple que $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{PT}$ y $\overline{RQ}$ son concurrentes.

Prueba

Hay muchas formas de demostrar el teorema (*una manera muy elegante es con potencia y eje radical, lo cual desarrollaremos en el libro N° 10*), daremos un prueba sintética analizando por partes.

– **PASO 1**

Se traza $\overline{AC}$ y $\overline{QR}$: $(\overline{AC}\cap\overline{QR}=\{X\})$



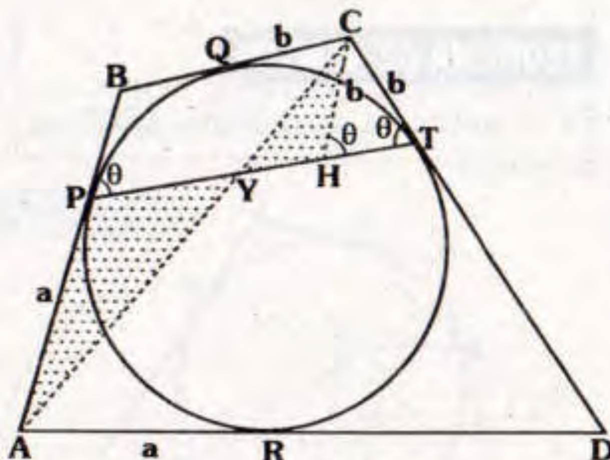
– Como $m\measuredangle ARQ = m\measuredangle BQR = \alpha$, se ubica S en $\overline{QR}$ tal que $m\measuredangle ASR = \alpha$

$$\Rightarrow \overline{AS}//\overline{QC}$$

– $\Delta AXS \sim \Delta CXQ \Rightarrow \dfrac{AX}{XC}=\dfrac{a}{b}$ ... (I)

– **PASO 2**

Ahora tracemos $\overline{AC}$ y $\overline{PT}$: $(\overline{AC}\cap\overline{PT}=\{Y\})$



– En forma similar a lo anterior:

$$\frac{AY}{YB}=\frac{a}{b} \quad ...\ (II)$$

– De (I) y (II): X=Y

Entonces $\overline{PT}$ y $\overline{QR}$ se cortan en un punto de la diagonal $\overline{AC}$.

– Si hacemos un procedimiento análogo para $\overline{BD}$, se tendrá que $\overline{PT}$ y $\overline{QR}$ se cortan en $\overline{BD}$.

$\therefore$ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{PT}$ y $\overline{QR}$ concurren.

GEOMETRÍA DE MASAS

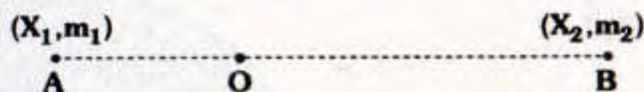
Es una herramienta muy útil en problemas que tengan que ver especialmente con razones de segmentos.

DEFINICIÓN DE CENTRO DE MASAS

En un plano ubicamos los puntos X_1, X_2, X_3, ... X_n a los cuales se les va asociar las masas m_1, m_2, ..., m_n respectivamente, el centro de masa es el punto O talque:

$$m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}+m_3\overrightarrow{OX_3}+\ldots+m_n\overrightarrow{OX_n}=\vec{0} \quad (\textit{vector nulo})$$

Veamos el caso en que n=2:



O es centro de masa $\Rightarrow\ m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}=\vec{0}$

$\Rightarrow\ m_1\overrightarrow{OX_1}=-m_2\overrightarrow{OX_2}$, considerando $m_1>0$ y $m_2>0$

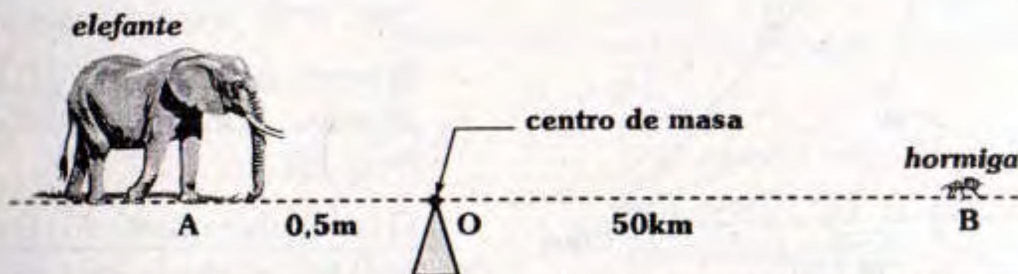
$\Rightarrow$ Los vectores $\overrightarrow{OX_1}$ y $\overrightarrow{OX_2}$ tienen sentidos contrarios.

Tomando módulos: $m_1|\overrightarrow{OX_1}|=m_2|\overrightarrow{OX_2}|\ \Rightarrow\ \boxed{\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{|\overrightarrow{OX_2}|}{|\overrightarrow{OX_1}|}=\dfrac{OB}{OA}}$

Observación

- *Si* $m_1=m_2\Rightarrow O$ *es punto medio de* $\overline{AB}$.
- *Si* $m_1\neq m_2\Rightarrow OA$ *y OB son proporcionales a* m_2 *y* m_1 *es decir* $OA=km_2$ *y* $OB=km_1$, *si* $m_1>m_2\Rightarrow OB>OA$, *el centro de masa está más cerca de A.*

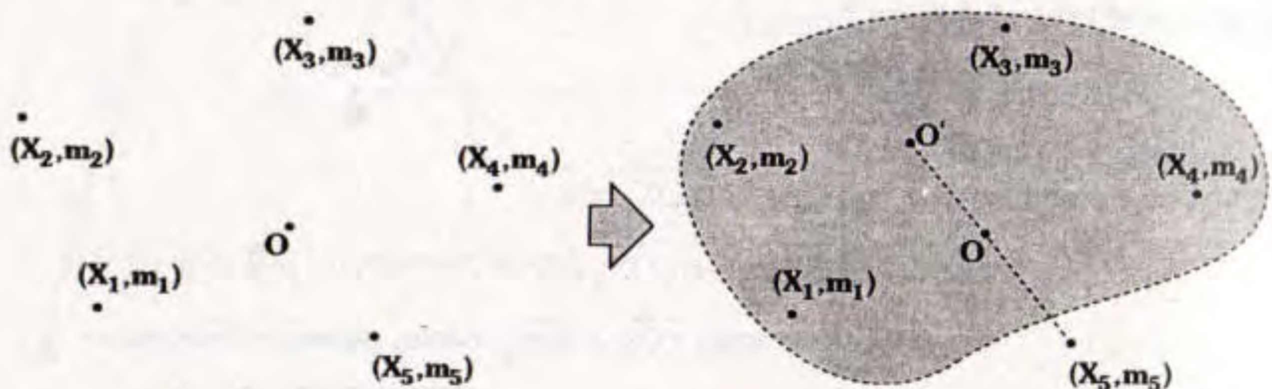
Así tenemos:



TEOREMAS

Enunciamos los siguientes teoremas sin demostración

- El centro de masa de cualquier sistema de puntos existe y es único.
- El centro de masa está determinado por los valores de las masas a que pertenece.
- Para cualquier sistema de puntos, si el centro de masa esta dado (*o deseamos que fuese algún punto conveniente*) se pueden buscar valores de masa tales que la posición de dicho centro no varíe.
- (**Teorema del agrupamiento de puntos**) El centro de masa de un sistema de puntos no varia si un grupo de puntos del sistema se sustituye por un punto, en el cual está su centro de masa y al cual se le asocia una masa igual a la suma de masas de esos puntos.



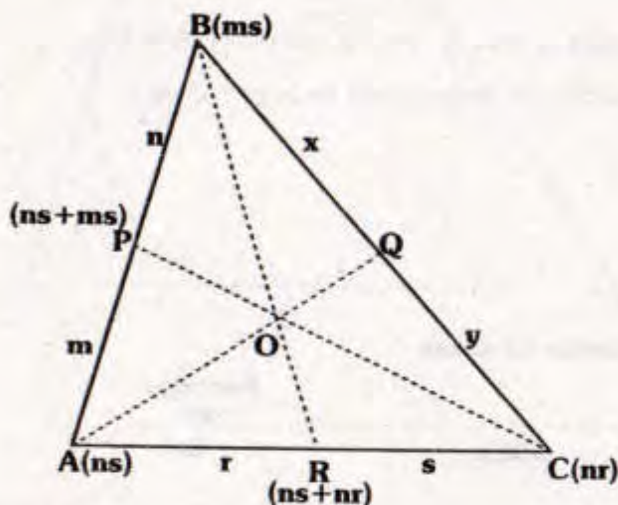
O: centro de masa de los puntos X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5.

O': centro de masa de X_1, X_2, X_3 y X_4 se le asocia la masa: $m_1+m_2+m_3+m_4$

O: centro de masa de O' y X_5

APLICACIONES

APLICACIÓN 1



- Como primera aplicación veamos una prueba sencilla del teorema de Ceva y de Van Aubel.
- Ubiquemos en A, B y C masas "ns", "ms" y "nr" respectivamente.
- El centro de masa de A y C es R, luego el centro de masa de B y R están en la línea $\overline{BR}$.
- El centro de masa de A y B está en P y de P y C está en la línea $\overline{CP}$.

- Se concluye que el centro de masa esta en la intersección de $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ (O es centro de masa del sistema)
- Finalmente el centro de masa de B y C debe estar en Q pues debe estar en la línea $\overline{AO}$.

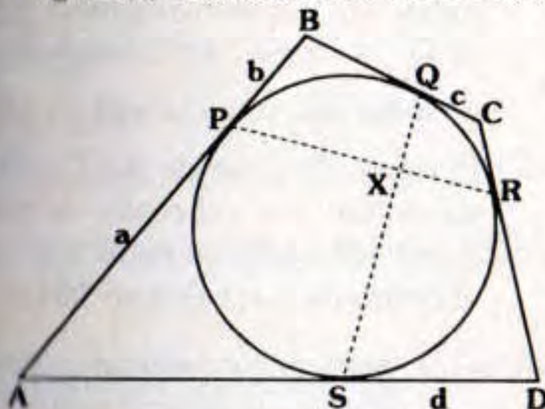
$$\Rightarrow \frac{|QB|}{|QC|}=\frac{nr}{ms} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{nr}{ms} \qquad \therefore\ xms=ynr$$

- Ahora veamos la prueba del teorema de Van Aubel.

- Como el centro de masa es O $\Rightarrow \frac{|OB|}{|OR|}=\frac{ns+nr}{ms} \Rightarrow \frac{|OB|}{|OR|}=\frac{n\not{s}}{m\not{s}}+\boxed{\frac{nr}{ms}}=\frac{n}{m}+\frac{x}{y}$ (con $\frac{nr}{ms}=\frac{x}{y}$)

APLICACIÓN 2

En el gráfico; el cuadrilátero ABCD es circunscrito.

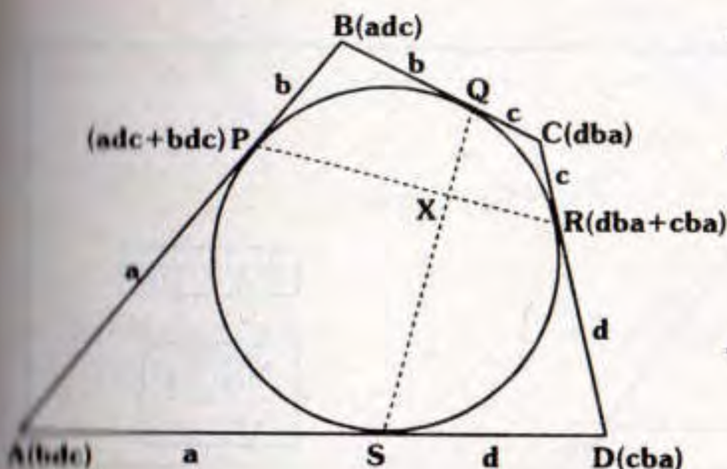


Se cumple:

$$\boxed{\frac{|PX|}{|XR|}=\frac{ab(c+d)}{cd(a+b)}}$$

$$\boxed{\frac{|QX|}{|XS|}=\frac{bc(a+d)}{ad(b+c)}}$$

Prueba



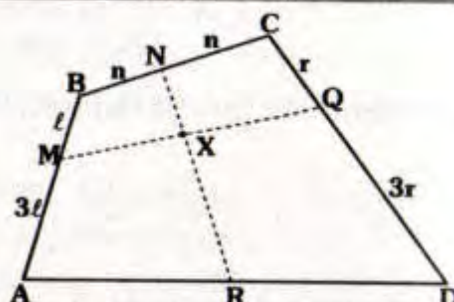
- Se ubica en A, B, C y D masas de abc, adc, dba y cba respectivamente.
- Luego en centro de masa de A y B está en P , de C y D esta en R, luego el centro de masa del sistema está en $\overline{PR}$.
- Análogamente el centro de masa del sistema esta en $\overline{QS}$ el centro de masa del sistema está en $\overline{PR} \cap \overline{QS} = \{X\}$

Finalmente: $\dfrac{|XP|}{|XR|}=\dfrac{dba+cba}{adc+bdc} \Rightarrow \dfrac{|XP|}{|XR|}=\dfrac{ab(c+d)}{cd(a+b)}$

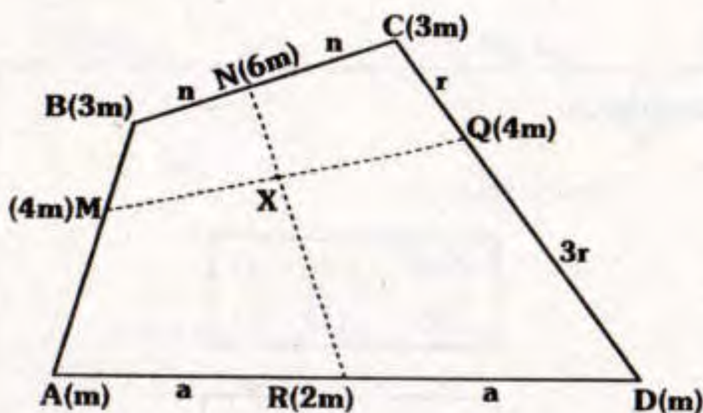
Análogamente: $\dfrac{|XQ|}{|XS|}=\dfrac{bc(a+d)}{ad(b+c)}$

En el gráfico, se cumple:

$MX=XQ$ y $\dfrac{NX}{XR}=\dfrac{1}{3}$



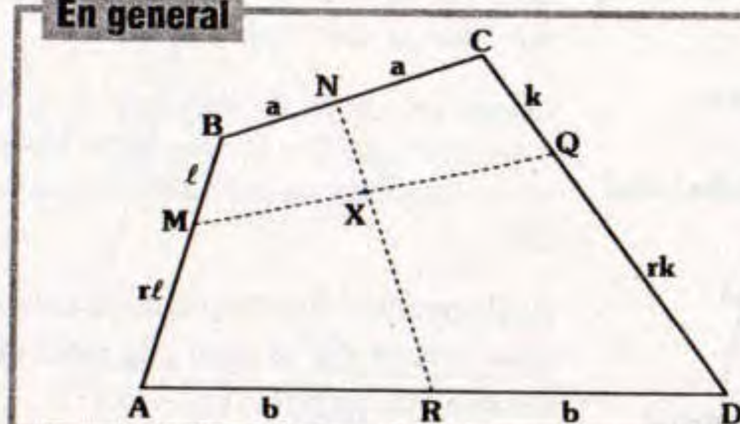
Prueba



- Se ubican en A, B, C y D masas "m", "3m", "3m" y "m" respectivamente.
- El centro de masa de A y B es M, con masa "4m"; el centro de masa de C y D es Q con masa "4m"; luego el centro de masa del conjunto está en $\overline{MQ}$.
- El centro de masa de B y C está en N con masa "6m"; el centro de masa de A y D está en R con masa "2m", luego el centro de masa está en $\overline{NR}$.

- Como el centro de masa está en $\overline{MQ}$ y en $\overline{NR}$ entonces el centro de masa es X.
- Finalmente: $\dfrac{|XM|}{|XQ|}=\dfrac{4m}{4m} \Rightarrow MX=XQ$ y $\dfrac{|NX|}{|XQ|}=\dfrac{2m}{6m} \Rightarrow \dfrac{NX}{XQ}=\dfrac{1}{3}$

En general



Se cumple:

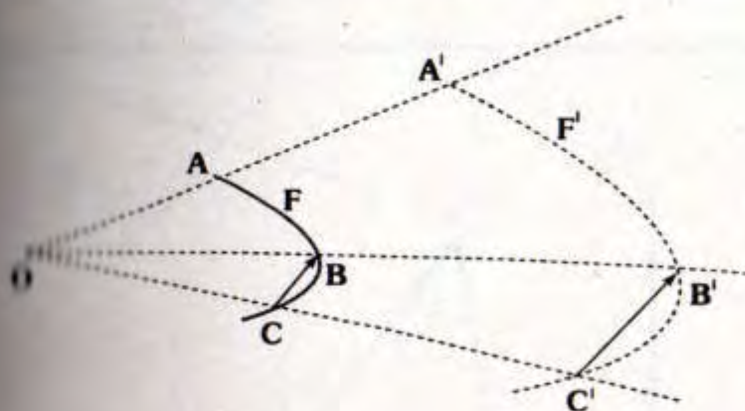
$$MX = XQ$$

$$\frac{NX}{XR}=\frac{1}{r}$$

HOMOTECIA

Es una transformación geométrica del tipo ISOMORFA, es decir sólo va a cambiar las proporciones de la figura más no la forma.

HOMOTECIA DIRECTA



O: Centro de homotecia directa

k: razón de la homotecia directa (k>0)

A y A': Puntos homotéticos si:

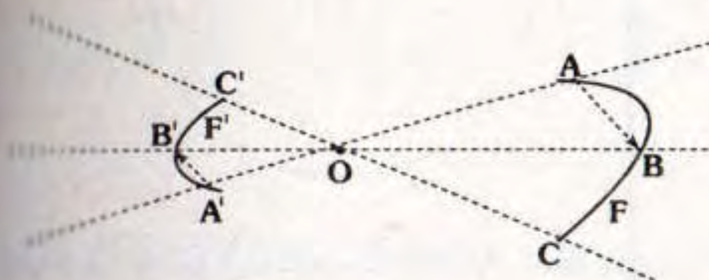
$$\frac{OA'}{OA} = k$$

Observación:

Como $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$, luego tendremos $\overline{CB} // \overline{CB'}$ y $C'B' = k(CB)$.

Los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{C'B'}$ son homotéticos y las figuras F y F' son homotéticas.

HOMOTECIA INVERSA



O: Centro de homotecia inversa

k: razón de la homotecia inversa (k<0)

A y A' son homotéticos si:

$$\frac{OA'}{OA} = k$$

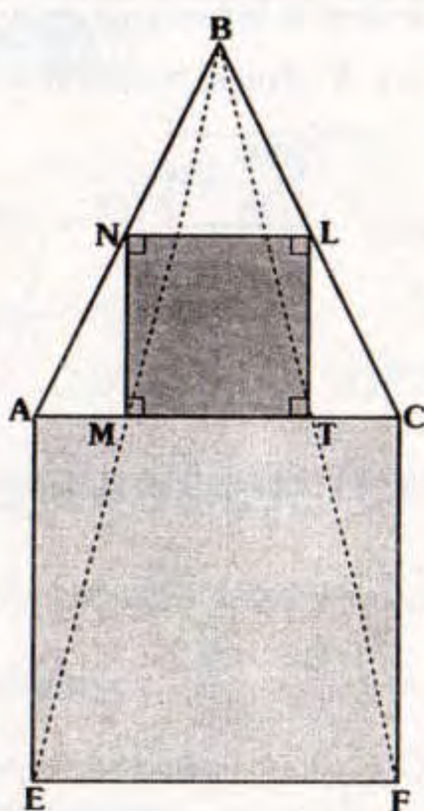
También los pares B – B' y C – C' son puntos homotéticos, luego $\overline{A'B'} // \overline{AB}$, $\overline{B'C'} // \overline{BC}$ y $\overline{A'C'} // \overline{CA}$.

$\overline{A'B'}$ y $\overline{AB}$ son segmentos homotéticos.

Observaciones

- *Las figuras homotéticas son semejantes* $(F \sim F')$
- *Si* $|k| > 1$ *entonces la figura aumenta de tamaño; si* $|k| < 1$ *la figura se reduce de tamaño; si* $|k| = 1 \Rightarrow F \cong F'$
- *Dos puntos homotéticos son colineales con el centro de homotecia.*
- *Las razones de los segmentos se está considerando las razones de segmentos dirigidos.*

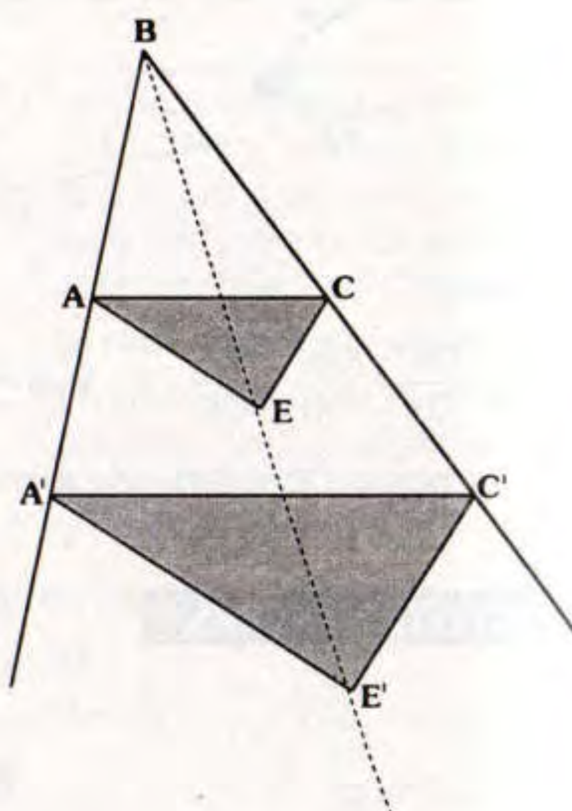
APLICACIÓN



Si : EACF y MNLT son cuadrados

⇒ Dichos cuadrados son homotéticos cuyo centro de homotecia es B.

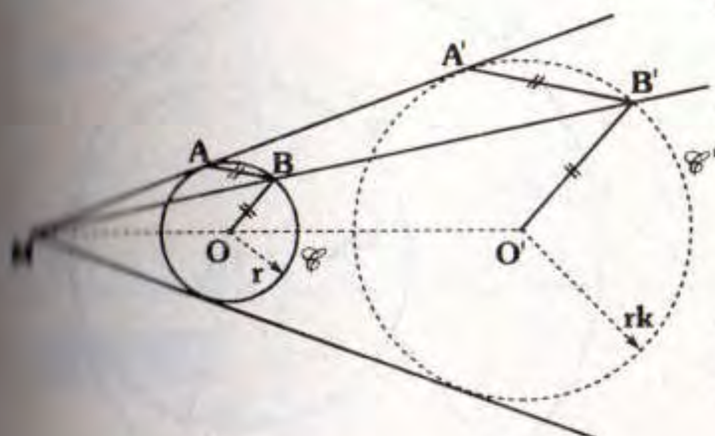
⇒ E, M y B son colineales lo mismo que F, T y B colineales.



Si : $\overline{AC} // \overline{A'C'}$, $\overline{AE} // \overline{A'E'}$ y $\overline{CE} // \overline{C'E'}$

⇒ Los triángulos AEC y A'E'C' son homotéticos y los puntos E' y E son homotéticos entonces E', E y B son colineales.

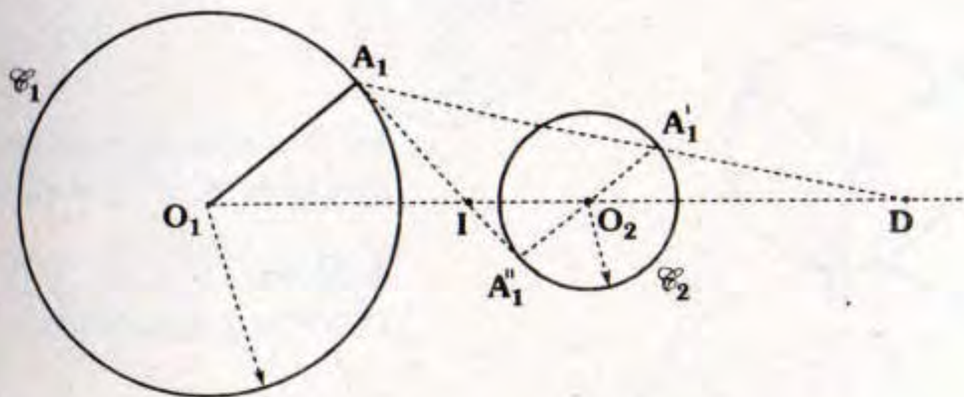
HOMOTECIA DE CIRCUNFERENCIAS



- Sea la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y sea M el centro de homotecia.
- A y A' son puntos homotéticos entonces $\frac{OA'}{OA} = k$ luego el homotético de $\mathscr{C}$ es $\mathscr{C}'$, cuyo radio es "rk".
- Notemos que $\overline{AB} // \overline{A'B'}$ y $\overline{OB} // \overline{O'B'}$.
- Lo anterior nos da los criterios para hallar los centros de homotecia de dos figura homotéticas.

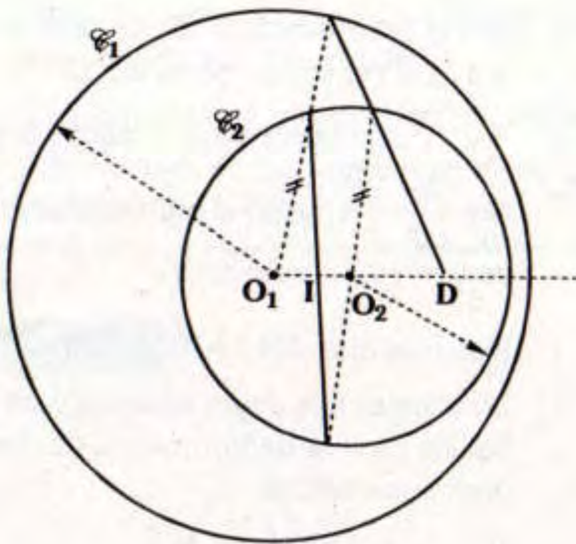
UBICACIÓN DEL CENTRO DE HOMOTECIA DADAS DOS CIRCUNFERENCIAS

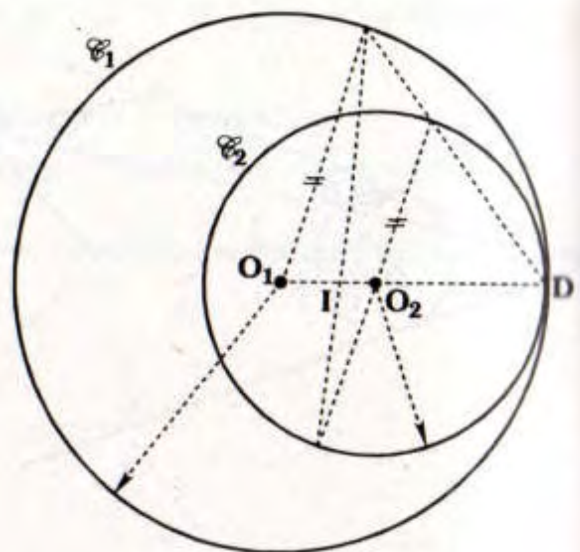
Consideramos las circunferencias de radios diferentes y no concéntricas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ y de centros O_1 y O_2 respectivamente.

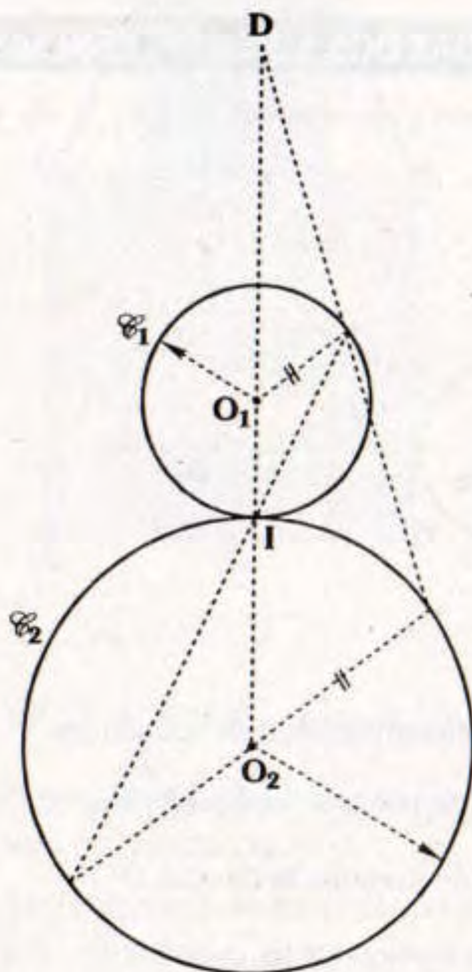


- Los centros de homotecia directa e inversa se ubicarán en la línea de los centros.
- En $\mathscr{C}_1$ se ubica A_1 y en $\mathscr{C}_2$ se traza el diámetro $\overline{A_1'A_1''}$ tal que $\overline{O_1A_1} // \overline{A_1''A'}$.
- La intersección de $\overleftrightarrow{A_1A_1'}$ y $\overline{O_1O_2}$ nos da el centro de homotecia directa: D.
- La intersección de $\overline{O_1O_2}$ con $\overline{A_1A_1''}$ es el centro de homotecia inversa: I

Veamos otras posibilidades:







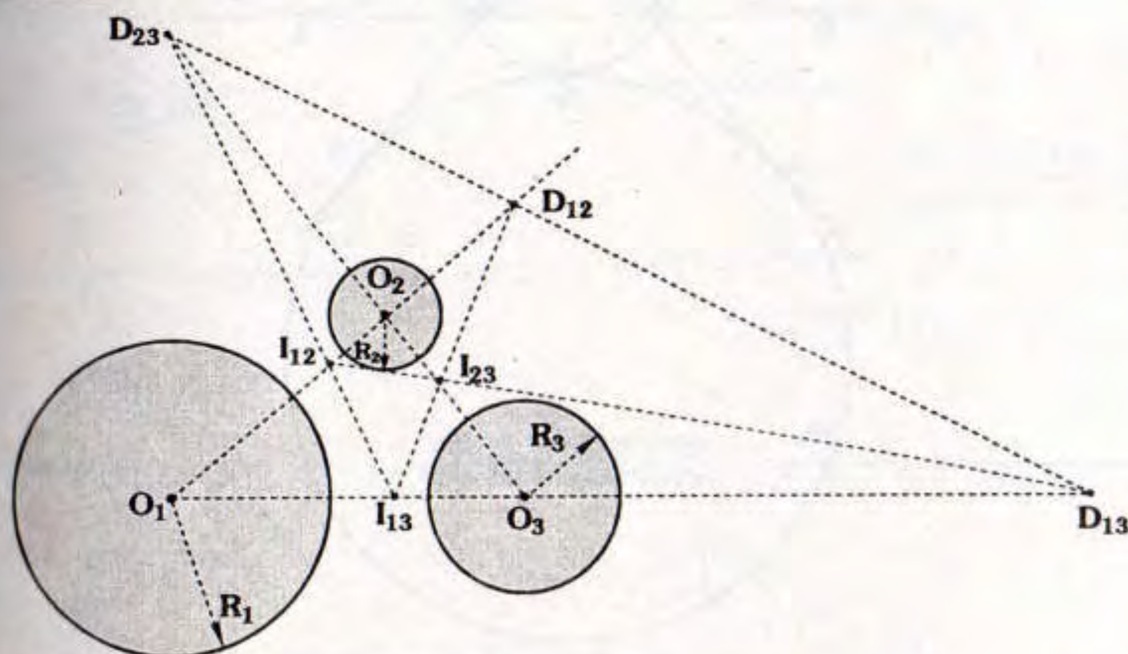
- I y D centros de homotecia inversa y directa de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente.
- También; O_1, I, O_2 y D forman una CUATERNA ARMÓNICA.

TEOREMA

Sean tres circunferencias coplanares de radios diferentes: $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ los cuales son no concéntricas. Sean D_{ij} e I_{ij} los centros de homotecia de $\mathscr{C}_i$ y $\mathscr{C}_j$.

Se cumple:
- D_{12}, D_{23} y D_{13} son colineales
- D_{12}, I_{23} e I_{13} son colineales
- I_{12}, D_{23} e I_{13} son colineales
- I_{12}, I_{23} y D_{13} son colineales

Prueba



- Los centros de homotecia, cumplen:

$$\frac{D_{ij}O_i}{D_{ij}O_j}=\frac{R_i}{R_j} \text{ y } \left|\frac{I_{ij}O_i}{I_{ij}O_j}\right|=\frac{R_i}{R_j} \text{ para: } i\neq j,\ i=1,2,3 \text{ y } j=1,2,3$$

- Observemos que para el triángulo $O_1O_2O_3$ se cumple:

$$\frac{O_1D_{12}}{D_{12}O_2}\cdot\frac{O_2D_{23}}{D_{23}O_3}\cdot\frac{O_3D_{13}}{D_{13}O_1}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}\cdot\frac{R_3}{R_1}=1 \Rightarrow D_{12},\ D_{23} \text{ y } D_{13} : \text{colineales}$$

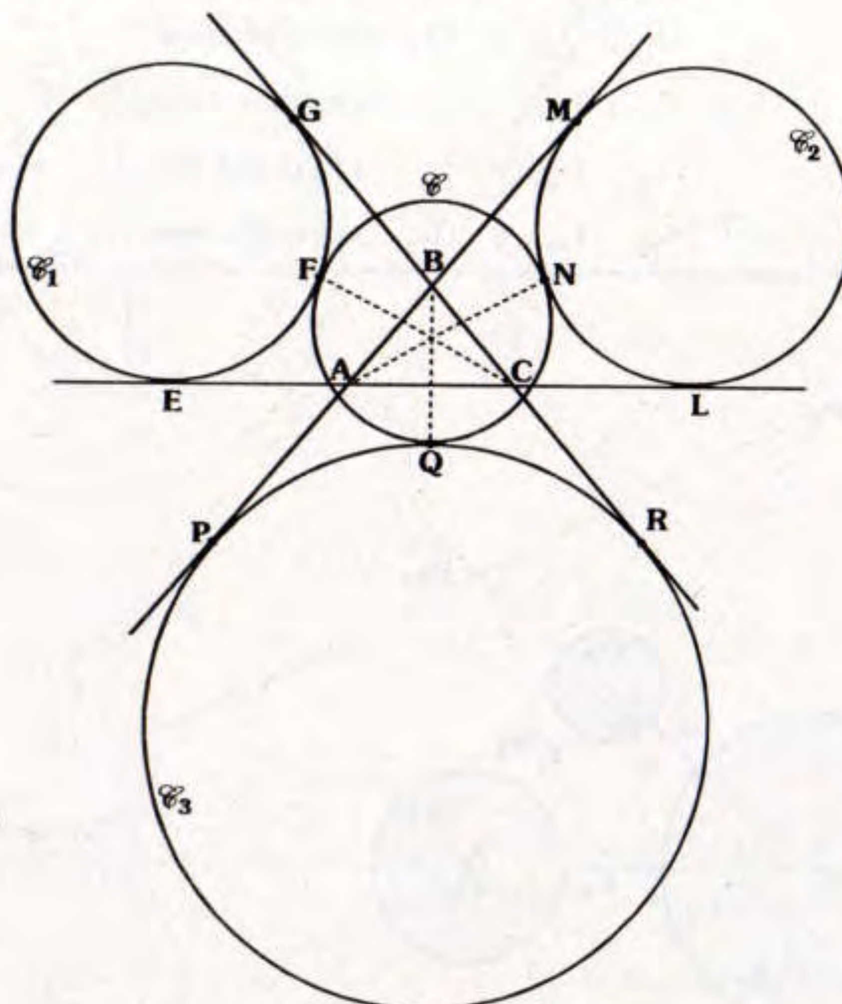
$$\frac{O_1I_{12}}{I_{12}O_2}\cdot\frac{O_2I_{23}}{I_{23}O_3}\cdot\frac{O_3D_{13}}{D_{13}O_1}=1 \Rightarrow I_{12},\ I_{23} \text{ y } D_{13} : \text{colineales}$$

- Análogamente para las demas ternas.

APLICACIÓN

Como aplicación del teorema anterior veamos:

En el gráfico, E, F, G, M, N, L, R, Q y P son puntos de tangencia



Se cumple: $\overline{AN}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BQ}$ concurren

Prueba

Se traza la circunferencia inscrita: K del ΔABC.

- Analicemos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}$ y K:

  - F es centro de homotecia inversa de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$
  - C es centro de homotecia directa de $\mathscr{C}_1$ y K
  - X es centro de homotecia inversa de K y $\mathscr{C}$

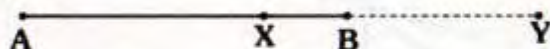
  } F, C y X: colineales

- Análogamente: N, A y X colineales ; B, Q y X colineales

$\therefore$ $\overline{AN}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BQ}$ concurren en X.

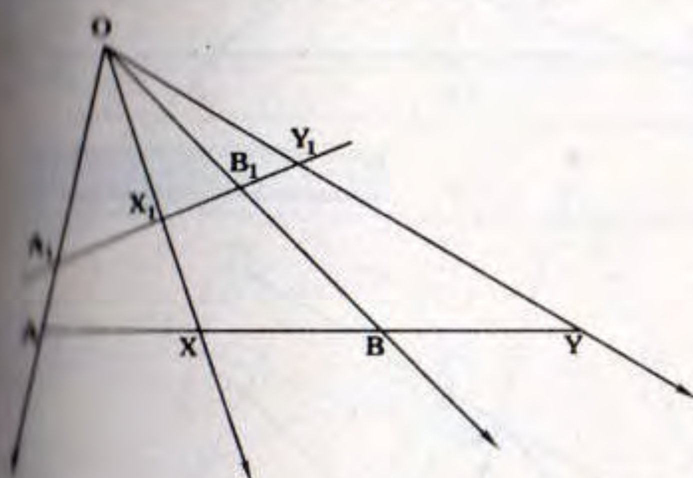
RAZÓN DOBLE O RAZÓN CRUZADA

Un tema muy importante por sus aplicaciones es el de razón doble, con ello demostraremos fácilmente los teoremas de Pascal, Pappus y Desargues:



X e Y dividen a $\overline{AB}$, se define la razón doble como: $\frac{AX}{XB}\Big/\frac{AY}{YB}$ y lo denotamos por $\{ABXY\}$

HAZ DE CUATRO HILERAS



Se denotará por:

$$O-\{ABXY\}$$

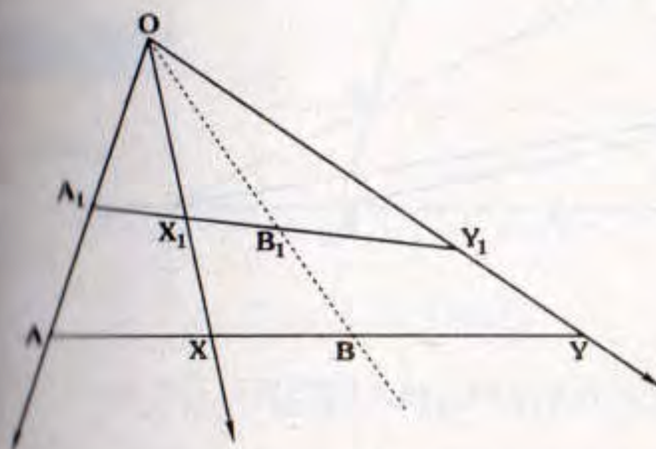
Es fácil verificar que:

$$\{ABXY\}=\frac{\text{sen}AOX}{\text{sen}XOB}\Big/\frac{\text{sen }AOY}{\text{sen }YOB}$$

Luego se deduce:

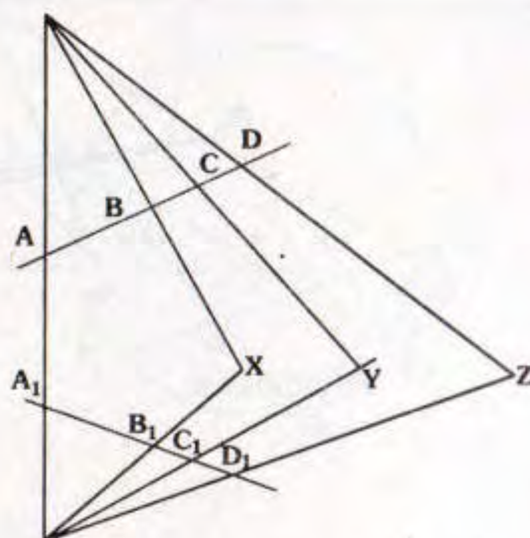
$$\{ABXY\}=\{A_1B_1X_1Y_1\}$$

Observaciones



Si: $\{AXBY\}=\{A_1X_1B_1Y_1\}$

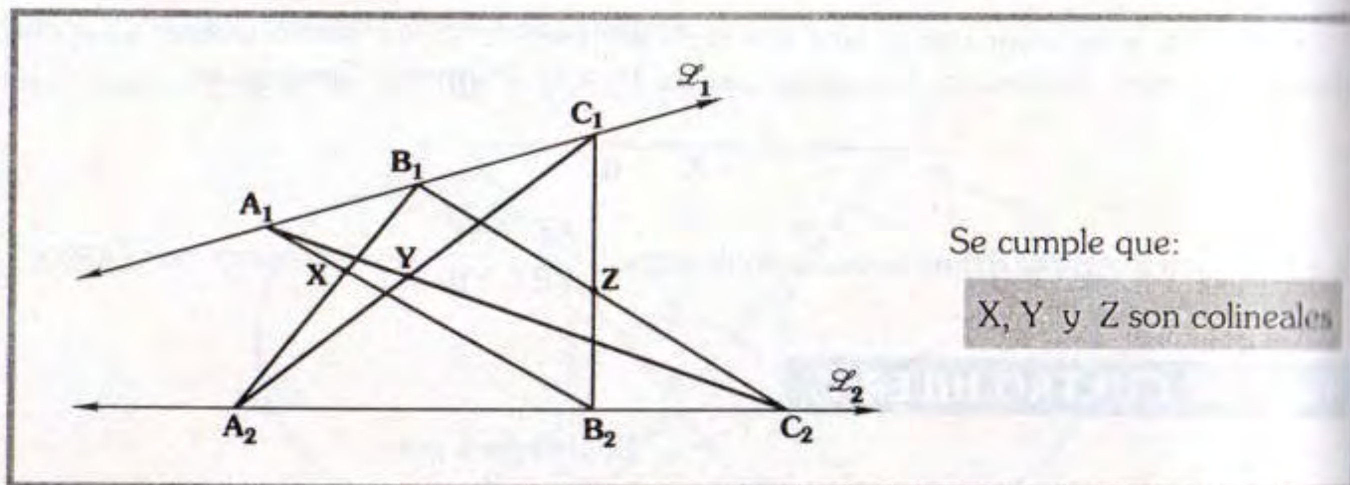
$\Rightarrow$ O, B_1 y B son colineales



Si: $\{ABCD\}=\{A_1B_1C_1D_1\}$

$\Rightarrow$ X, Y y Z son colineales

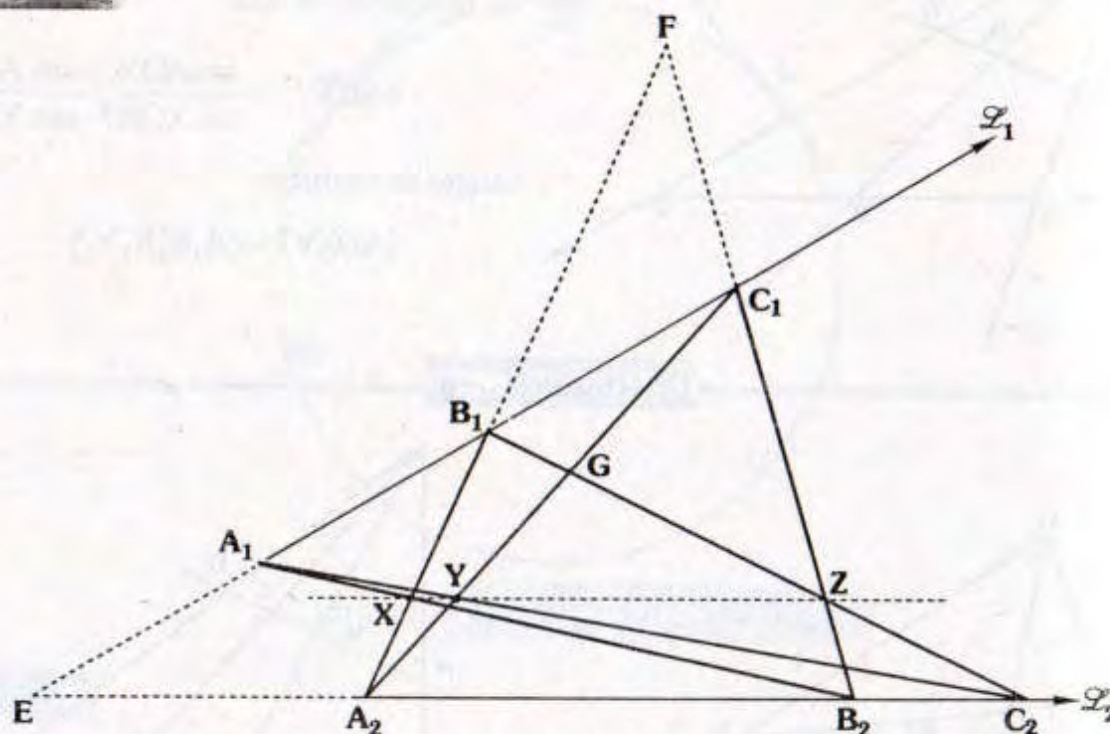
TEOREMA DE PAPPUS



Se cumple que:

X, Y y Z son colineales

Prueba



Partimos así:

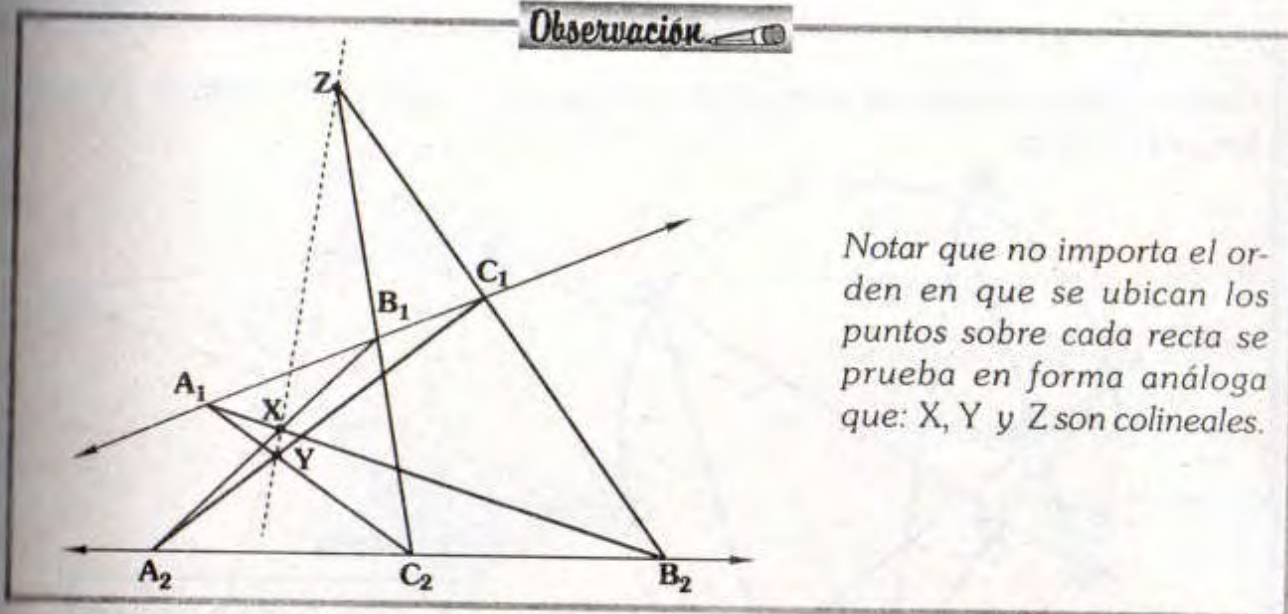
$$B_2\{EA_1B_1C_1\} = C_2\{EA_1B_1C_1\}$$

$$\Rightarrow \; B_2\{A_2XB_1F\} = C_2\{A_2YGC_1\}$$

$$\Rightarrow \; Z\{A_2XB_1F\} = Z\{A_2YGC_1\}$$

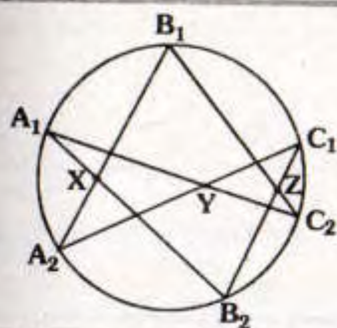
$\therefore$ X, Y y Z son colineales.

Observación



Notar que no importa el orden en que se ubican los puntos sobre cada recta se prueba en forma análoga que: X, Y y Z son colineales.

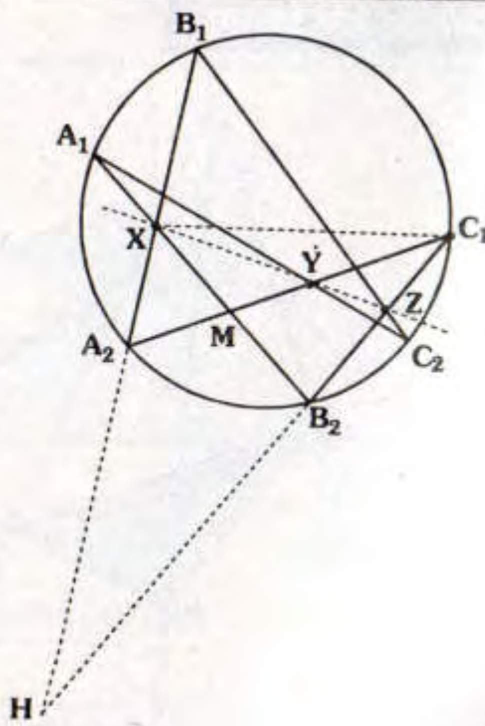
TEOREMA DE PASCAL



En el gráfico, se cumple:

X , Y , Z son colineales

Prueba



Como:

$$B_1\{C_1C_2B_2A_2\} = A_1\{C_1C_2B_2A_2\}$$

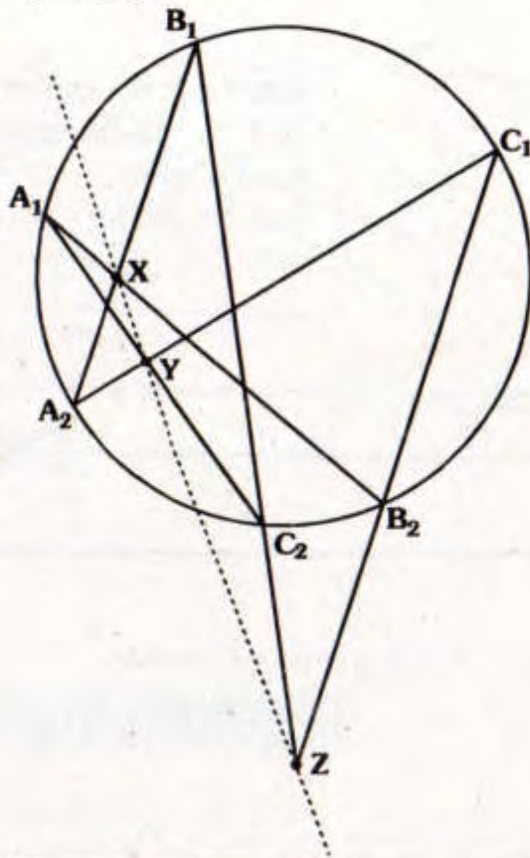
$$\Rightarrow \quad \{C_1ZB_2H\} = \{C_1YMA_2\}$$

$$\Rightarrow X\{C_1ZB_2H\} = X\{C_1YMA_2\}$$

$\therefore$ X, Y y Z son colineales.

Observación

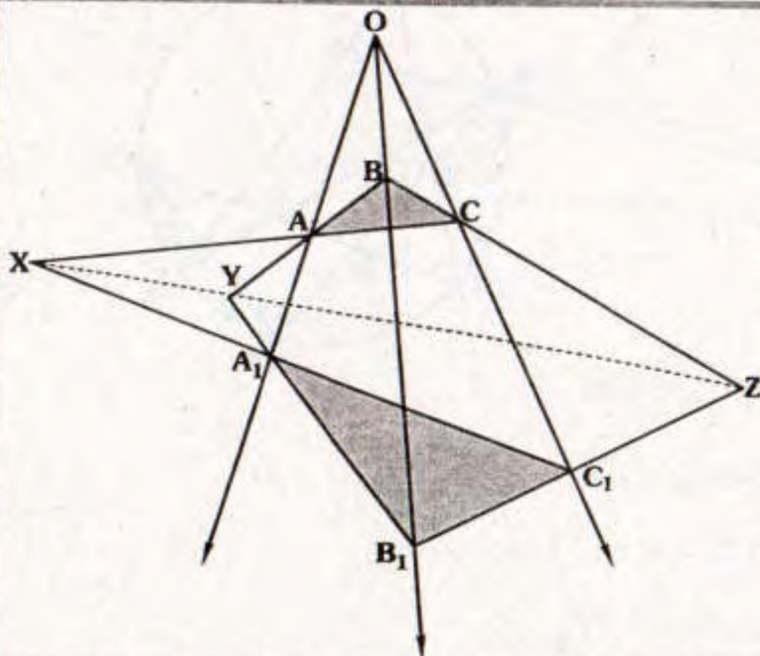
Con las mismas notaciones se prueban muchos casos, variando el orden de los puntos, por ejemplo:



Se cumple:

X, Y *y* Z *son colineales*

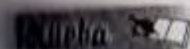
TEOREMA DE DESARGUES

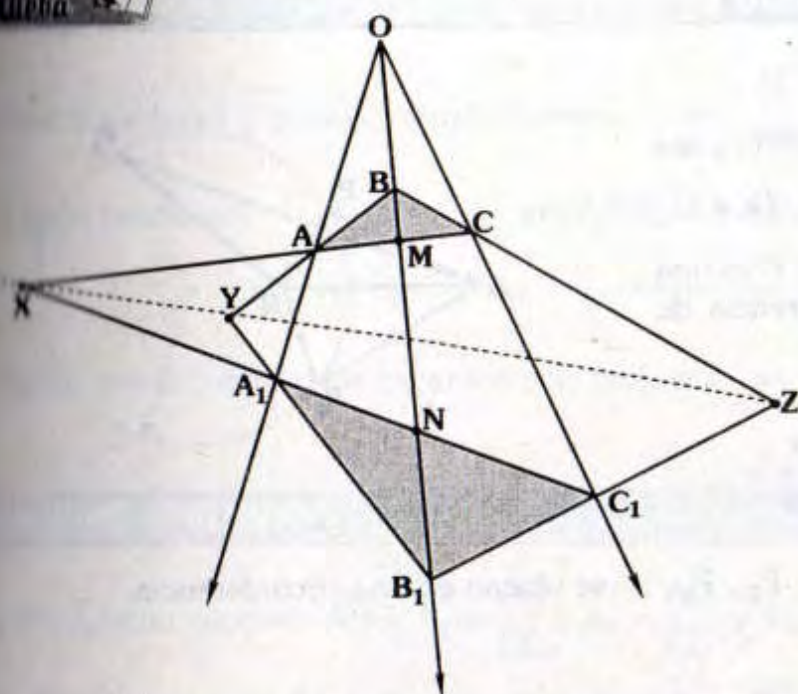


En el gráfico, se cumple:

X, Y y Z son colineales

Al punto O se le llama centro de perspectiva de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.





Notemos que:

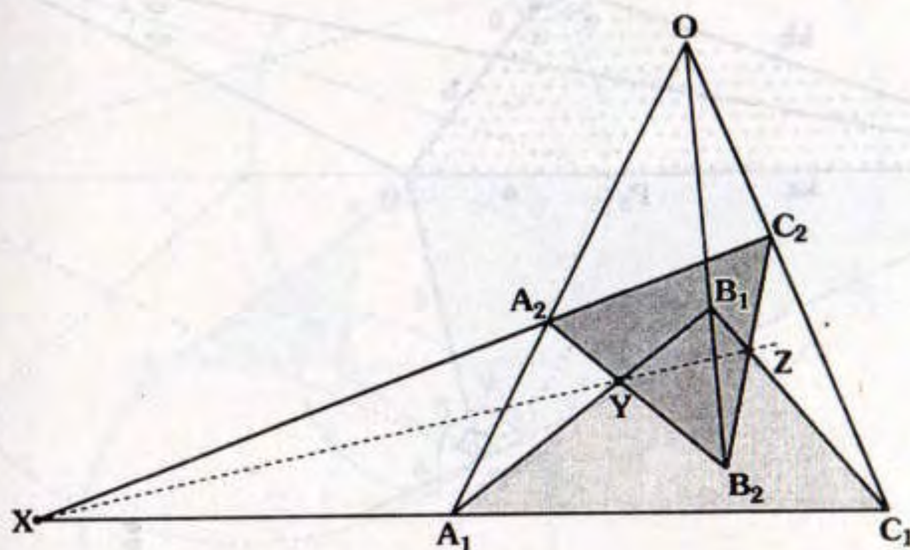
$O\{XAMC\} = B_1\{XANC_1\}$

$\Rightarrow \; B\{XYMZ\} = B_1\{XYNZ\}$

$\therefore$ X, Y y Z son colineales.

Observación

Veamos otras posibilidades:



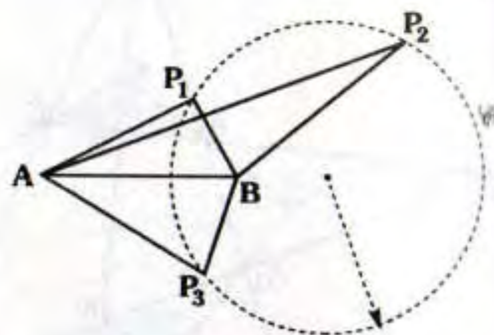
Se cumple:

X, Y y *Z son colineales.*

CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

TEOREMA

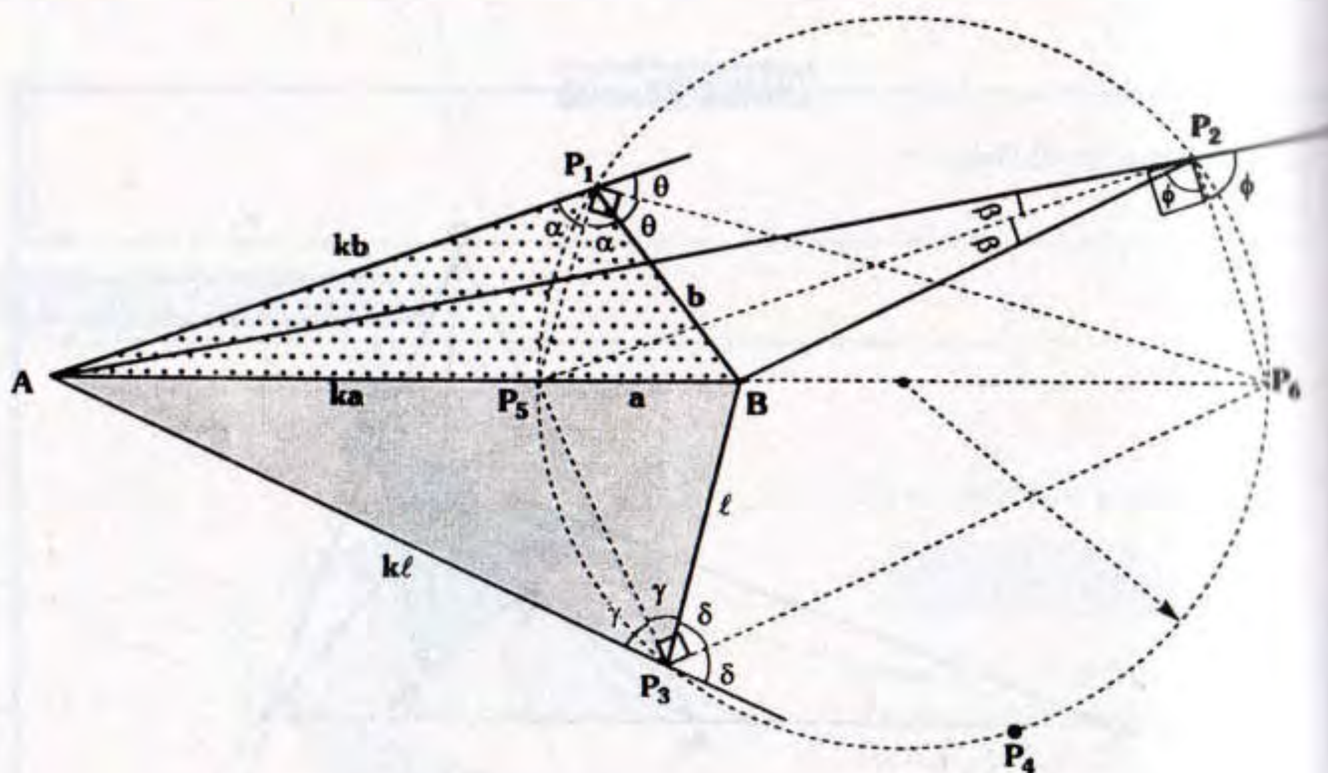
Sea el segmento fijo $\overline{AB}$ en un plano y sea un punto móvil P tal que $\frac{AP}{PB} = k \ (k \neq 1)$, el lugar geométrico que describe P es una circunferencia, llamada circunferencia de Apolonio o de Similitud.



En el gráfico: $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AP_3}{P_3B} = ...$

$\Rightarrow$ Los puntos P_1, P_2, P_3, ... se ubican en una circunferencia.

Prueba



- Se ubica P_5 en $\overline{AB}$ y P_6 en la prolongación de $\overline{AB}$ (suponiendo que $|k| > 1$) tal que $\frac{AP_5}{P_5B} = \frac{AP_6}{P_6B} = k$

* Luego para todo punto $P_i \neq P_5$ y $P_i \neq P_6$ se tendrá que en el ΔAP_iB, $\overline{P_iP_5}$ y $\overline{P_iP_6}$ es bisectriz interior y exterior respectivamente, pues: $\dfrac{AP_i}{P_iB} = \dfrac{AP_5}{P_5B} = \dfrac{AP_6}{P_6B} = k$

* Luego tendremos: $m\measuredangle P_5P_1P_6 = m\measuredangle P_5P_2P_6 = m\measuredangle P_5P_3P_6 = 90°$

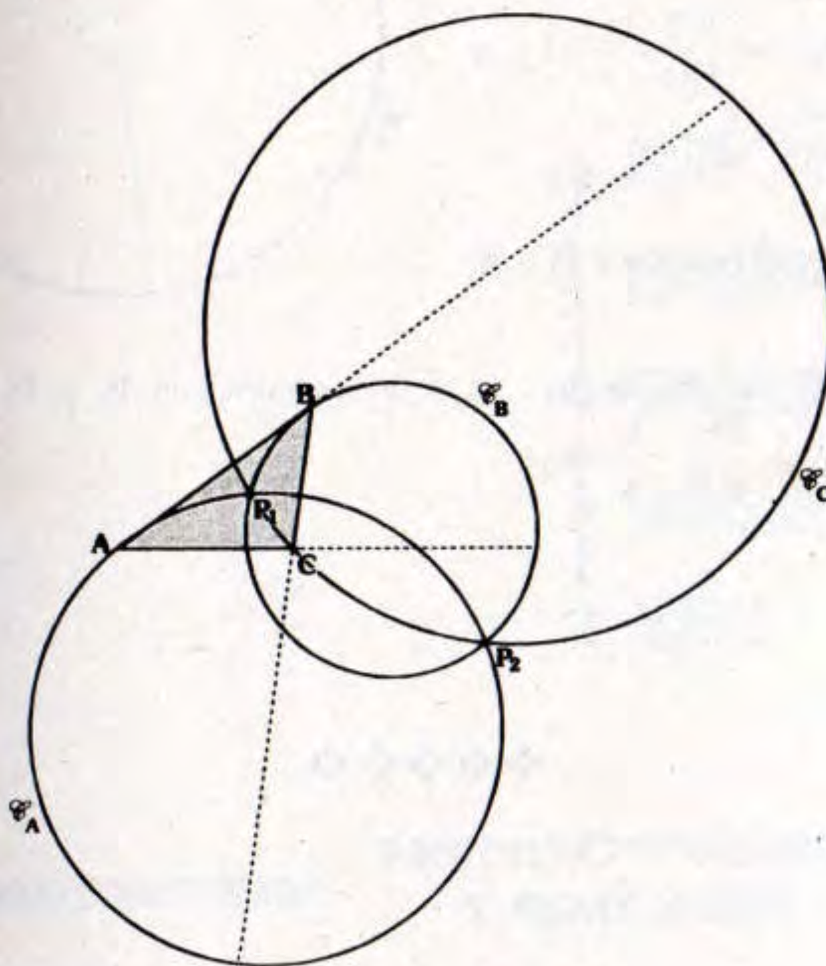
$$\Rightarrow \; P_1, P_2, P_3, P_4, \dots \text{ formarán una circunferencia}$$

* Notar que el centro de la circunferencia está en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y es el punto medio $\overline{P_5P_6}$.

PUNTO DE APOLONIO

Sea el triángulo escaleno ABC, $k_1 = \dfrac{AB}{BC}$, $k_2 = \dfrac{AC}{CB}$ y $k_3 = \dfrac{AB}{AC}$.

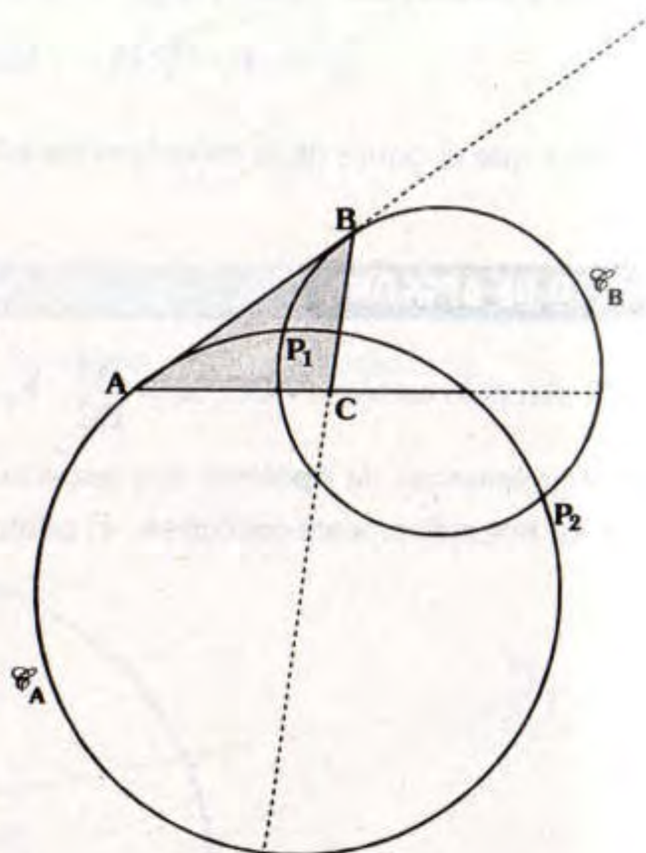
Las circunferencias de Apolonio con respecto a $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ cuyas constantes son k_1, k_2 y k_3 respectivamente concurren. El punto de concurrencia se llama punto de Apolonio.



- Para el ΔABC, $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ y $\mathscr{C}_C$ son las circunferencias de Apolonio.
- Se cumple: $\mathscr{C}_A \cap \mathscr{C}_B \cap \mathscr{C}_C = \{P_1, P_2\}$
- P_1 y P_2 : Puntos de Apolonio

Prueba

- Sea AB=c; BC=a; AC=b $\quad c > b > a$
- $k_1 = \frac{c}{a}$; $k_2 = \frac{b}{a}$ y $k_3 = \frac{c}{b}$
- $\mathscr{C}_A$; $\mathscr{C}_B$ y $\mathscr{C}_C$ las circunferencias de Apolonio respecto de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ cuyas razones son k_3, k_1 y k_2 respectivamente.



- Se trazan $\mathscr{C}_A$ y $\mathscr{C}_B$ secantes en P_1 y P_2,

  como $P_1 \in \mathscr{C}_A \Rightarrow \frac{AP_1}{P_1C} = \frac{c}{a} = k_1$ y

  $P_1 \in \mathscr{C}_B \Rightarrow \frac{BP_1}{P_1C} = \frac{c}{b} = k_3$

  Luego $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{b}{a} = k_3$, es decir $P_1 \in \mathscr{C}_C$

- Por lo tanto las circunferencias $\mathscr{C}_A$, $\mathscr{C}_B$ y $\mathscr{C}_C$ concurren en P_1 y P_2 (*Pues se prueba análogamente que*: $\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{b}{a} = k_3$)



Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS RESUELTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA



Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

En el gráfico, $\overline{AM}//\overline{BN}//\overline{CP}//\overline{DQ}//\overline{ER}$, MN = 1; NP = 2; PQ = 3 y QR = 4.

Calcule $\dfrac{AD}{BD+DE}$

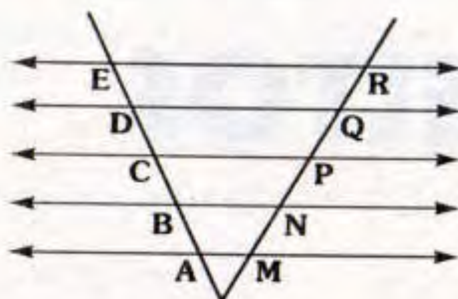
A) 1

B) 2

C) 3

D) 2/3

E) 3/2



PROBLEMA Nº 2

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AN y se ubica M en $\overline{AB}$ tal que 4(BN)=3(NC) y AM=MN. Calcule $\dfrac{BM}{AB}$.

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{7}{3}$ C) $\dfrac{3}{7}$

D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{4}{7}$

PROBLEMA Nº 3

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, $\overline{EF}//\overline{AD}$, PC=3 y AP=9. Calcule EP.

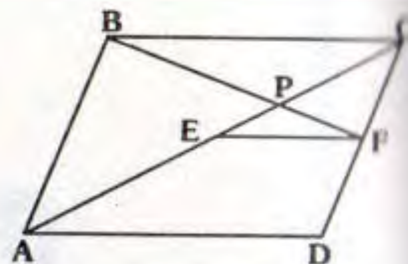
A) 1/2

B) 1

C) 3/2

D) 2/3

E) 2



PROBLEMA Nº 4

En el gráfico, $\overline{AC}//\overline{NM}$, BC=3(CD) y AE=2. Calcule AB.

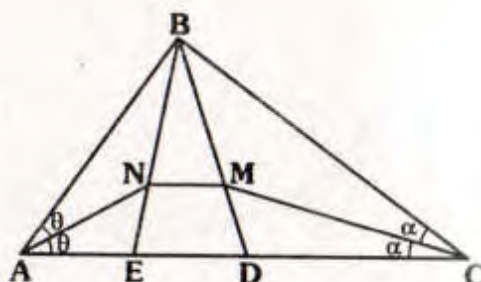
A) 5

B) 6

C) 4

D) 3

E) 8



PROBLEMA Nº 5

Se tiene el cuadrado ABCD de centro O, se ubica P en $\overline{AD}$, tal que $\overline{AO}\cap\overline{BP}=\{L\}$ y $m\sphericalangle PCD=\dfrac{37°}{2}$. Calcule $\dfrac{BL}{LP}$

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) 2 E) $\dfrac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 6

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y PQ=7. Calcule QR.

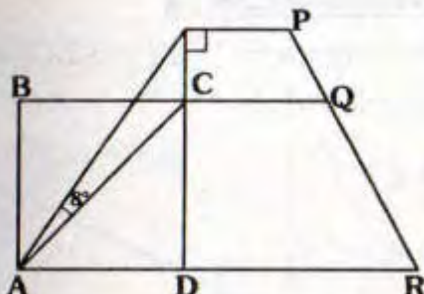
A) 21

B) 14

C) $7\sqrt{2}$

D) $14\sqrt{2}$

E) $21\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 7

En el gráfico, M es punto de tangencia, si $m\widehat{PQ}=106°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$. Calcule $\frac{AB}{BC}$.

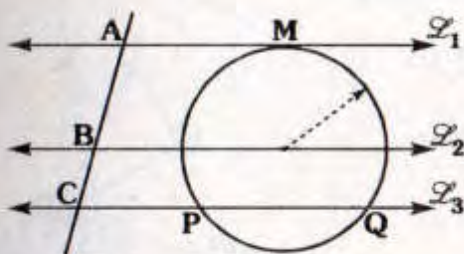
A) 3/8

B) 3/5

C) 2/5

D) 4/5

E) 5/3



PROBLEMA Nº 8

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, halle $\frac{a}{m}+\frac{n}{b}$.

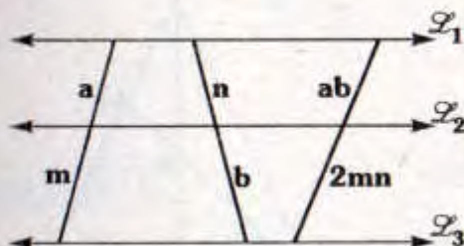
A) 1

B) 2

C) 3/2

D) 3

E) 2/3



PROBLEMA Nº 9

En el gráfico, ABCD es cuadrado y $m\widehat{DQ}=53°$. Calcule $\frac{PQ}{QR}$.

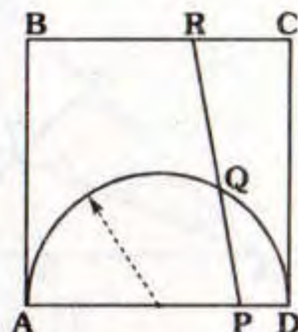
A) 3/4

B) 4/5

C) 2/3

D) 5/6

E) 2/5



PROBLEMA Nº 10

En el gráfico, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros. Si AD=1, DE=3 y $FG=\frac{4}{3}$. Calcule FC.

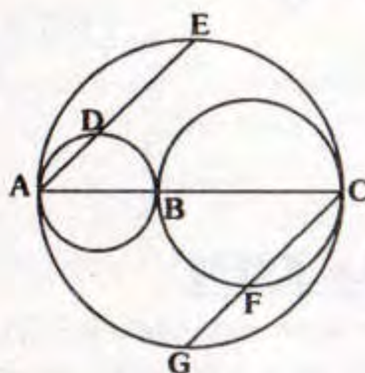
A) 4,5

B) 5

C) 5,2

D) 5,5

E) 4



PROBLEMA Nº 11

De la figura, FC=5, CR=10 y AR=4. Calcule AD.

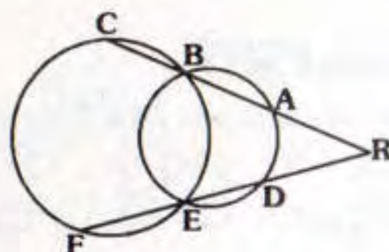
A) 1,5

B) 1

C) 2

D) 2,5

E) 3



PROBLEMA Nº 12

En el gráfico, AS=4(CS). Calcule BR/RC.

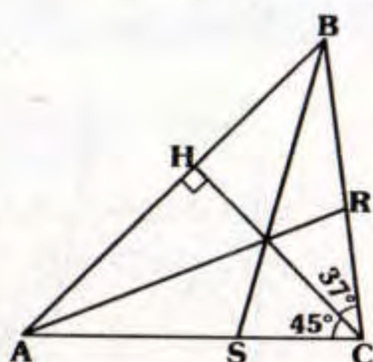
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 5/2



PROBLEMA Nº 13

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), M es punto medio de $\overline{BC}$, se traza $\overline{MH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$) tal que 8(AH)=13(HC), luego en el triángulo ABH se traza la altura AP. Calcule BP/PH.

A) $\frac{8}{13}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{13}{21}$

D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{3}{8}$

PROBLEMA Nº 14

En el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B se tiene que AB=BC, se ubica "P" en $\overline{BD}$. Si P dista 5 de $\overline{AD}$ y $m\measuredangle ADC = 53°$, ¿cuánto dista "P" de $\overline{CD}$?

A) 6 B) 8 C) 3

D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 15

Se tiene el cuadrado ABCD de centro O, P está en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{CD}$ tal que $m\measuredangle PAQ = 45°$, $\overline{OD} \cap \overline{AQ} = \{L\}$.

Si $PC = 6\sqrt{2}$. Calcule LD.

A) 6 B) 3 C) $3\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 16

De la figura, PB=12 y 3(BC)=4(AQ). Calcule AP.

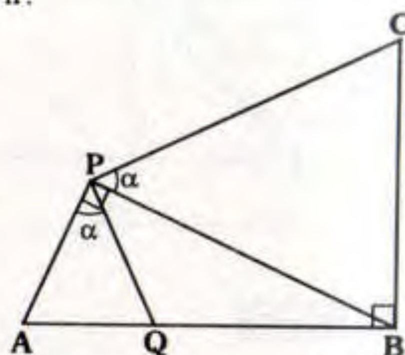
A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 10



PROBLEMA Nº 17

De la figura, (AB)(BE)=144, 3(AB)=4(AC). Calcule BC.

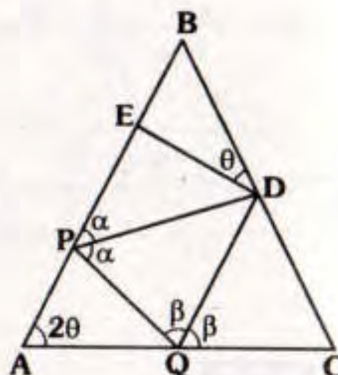
A) 15

B) 16

C) 21

D) 18

E) 8



PROBLEMA Nº 18

Si: AB=BC, AP=3(PQ), BQ=5, calcule QC.

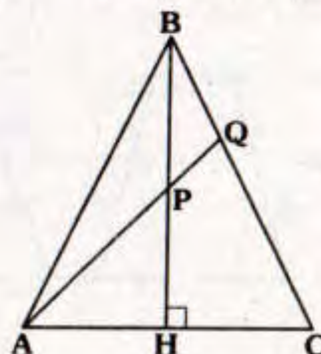
A) 5

B) 6

C) 10

D) 15

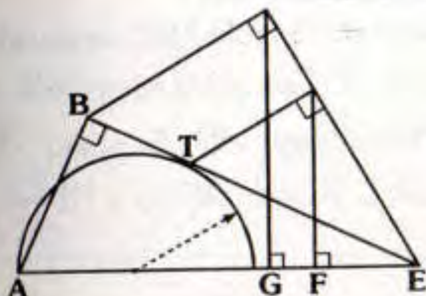
E) 8



PROBLEMA Nº 19

En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule AE, si: AB=3 y FE=3(GF).

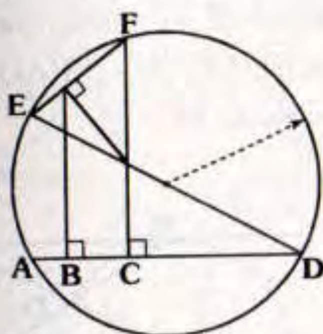
A) 6
B) 9
C) 12
D) 15
E) 18



PROBLEMA Nº 20

En el gráfico: AB=1 y BC=2. Calcular CD.

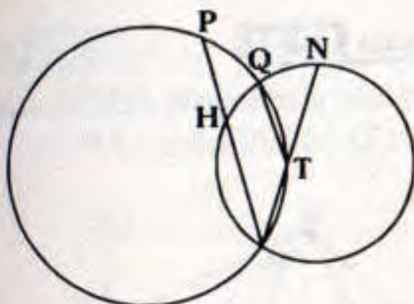
A) 12
B) 9
C) 4
D) 8
E) 6



PROBLEMA Nº 21

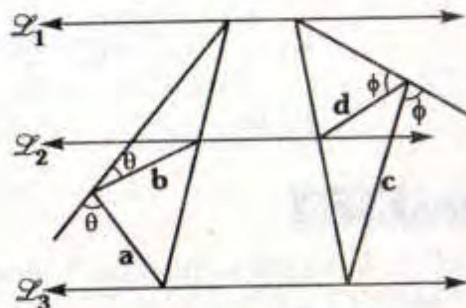
Calcular QT, si PQ=3 y NT=2(HP).

A) 6
B) 3
C) 4
D) 5
E) 4,5



PROBLEMA Nº 22

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, halle la relación entre a, b, c y d.



A) ab=cd
B) ad=cb
C) ac=bd
D) a+b=c+d
E) a–b=c–d

PROBLEMA Nº 23

En un triángulo ABC de incentro I, se ubica en $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle AID = 90°$. Calcule IC, si (BC)(CD)=64.

A) 2
B) 4
C) 8
D) 16
E) $4\sqrt{2}$

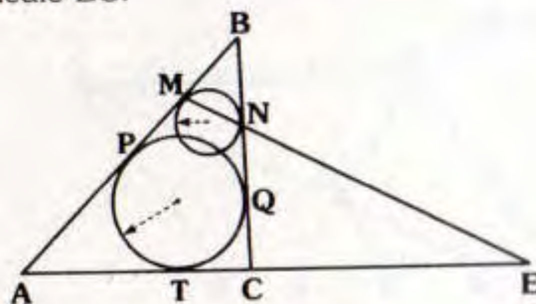
PROBLEMA Nº 24

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P en $\overline{AC}$. I y F son los incentros de los triángulos ABC y ADC respectivamente, son tal que $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DF}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ concurren. Si AB=18, BC=12 y AD=15, calcule CD.

A) 12
B) 15
C) 10
D) 9
E) 16

PROBLEMA Nº 25

En el gráfico M, P, T, Q y N son puntos de tangencia. Si AP=4, TC=1 y NQ=3. Calcule EC.



A) $\frac{20}{3}$ B) $\frac{18}{5}$ C) $\frac{20}{7}$

D) 20 E) 19

PROBLEMA Nº 26

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC y MBNG es paralelogramo. Si MG=2(AM) y BP= 4. Calcule PC.

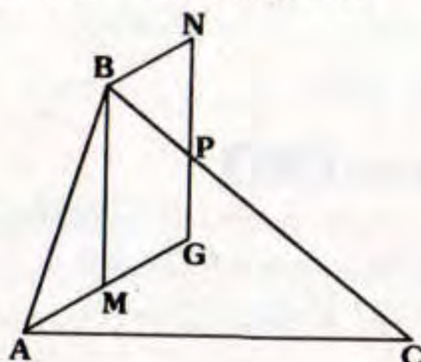
A) 15

B) 10

C) 12

D) 16

E) 14



PROBLEMA Nº 27

En el gráfico, las regiones sombreadas son regulares e isoperimétricas, si DG=6. Calcule BD.

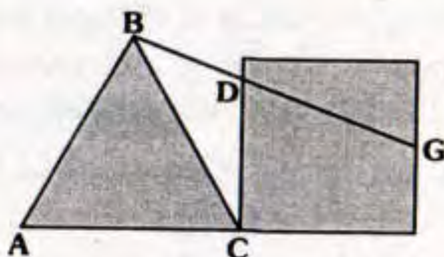
A) 4

B) 6

C) 8

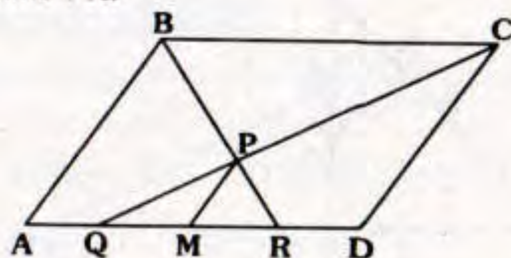
D) $2\sqrt{3}$

E) $3\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 28

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, $\overline{PM} \parallel \overline{CD}$, QM=MR=RD y BP=8. Calcule PR.



A) 2 B) 3 C) 4

D) 6 E) 8

PROBLEMA Nº 29

Se tiene el triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{BF}$, en el triángulo ABF se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$, E está en $\overline{BC}$ tal que $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, AB=5, AF=3 y DE=4. Calcule FC.

A) 6,4 B) 6 C) 12

D) 5,4 E) 6,2

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, E es punto de tangencia, $m\overset{\frown}{ED} = m\overset{\frown}{DB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, 3(AD)=7(ED) y AB=12. Calcule BC.

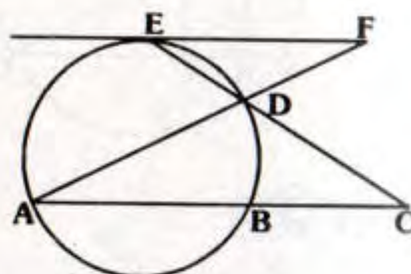
A)5

B) 7

C) 9

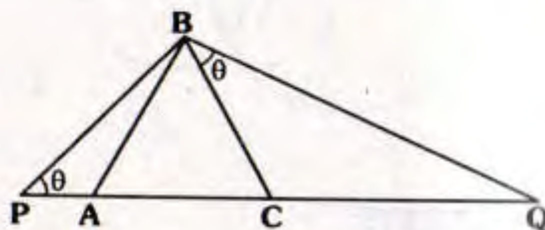
D) 10

E) 14



PROBLEMA Nº 31

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, PA=3 y CQ=12. Calcule AC.



A) 9 B) 6 C) 8

D) $6\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 32

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si QR=7(MT) y PQ=8. Calcule R.

A) 14/3

B) 6

C) 7/3

D) 21/5

E) 26/3

PROBLEMA Nº 33

CDEF es cuadrado, $m\widehat{AI}=90°$, (AB)(DH)=40 y $CF=2\sqrt{2}$. Calcule BC.

A) 8 B) 10 C) 12

D) $8\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, ABCD es cuadrado de centro O. Si QP=3(PR), AL=1 y AB=8.

Calcule OP.

A) 1

B) 1,5

C) 2

D) 2,5

E) 3

PROBLEMA Nº 35

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P en la prolongación de $\overline{DC}$ tal que $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle BCP$. Si AB=a y AD=b. Calcule AC

A) a+b B) $2\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\frac{a^2}{b}$ E) $3\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, si EA=2(EN)=2(NB), $\overline{MN} // \overline{FB}$, BC=8 y CD=3. Calcule MN.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5

D) 2 E) 2,5

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule AM/MC.

A) $\frac{b}{a}$ B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{a+b}{a}$

D) $\frac{a+b}{b}$ E) $\frac{a}{a+b}$

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, D es punto de tangencia. Si BC=5 y AE=4. Calcule EF.

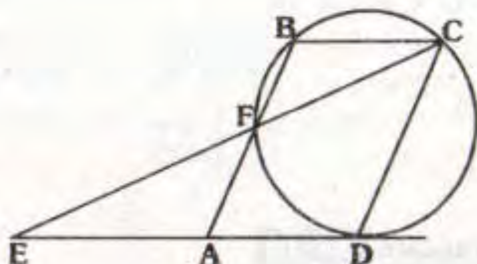
A) 4

B) 6

C) 5

D) 7

E) 9



PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si QD=a y BD=b. Calcule BC.

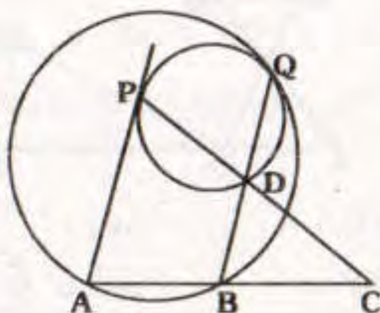
A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{a(a+b)}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $2\sqrt{a^2+b^2}$

E) $\sqrt{b(a+b)}$



PROBLEMA Nº 40

En el gráfico, AB=c, $m\widehat{QLB} = m\widehat{SB}$ y $m\widehat{BM} = m\widehat{QTB}$. Calcule BC.

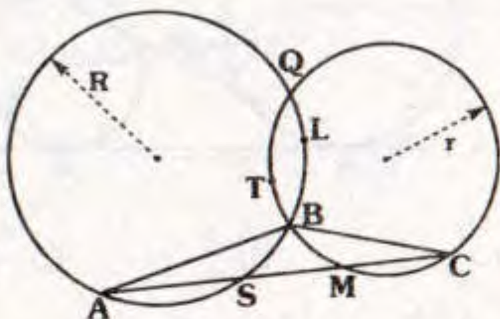
A) $\dfrac{cr}{R}$

B) $\dfrac{cR}{r}$

C) $\dfrac{cR}{r}$

D) $\dfrac{R^2}{r+c}$

E) $\dfrac{c^2}{R+r}$



PROBLEMA Nº 41

Del gráfico, $\dfrac{MQ}{QB} = \dfrac{2}{3}$. Calcule: $\dfrac{CQ}{QN}$

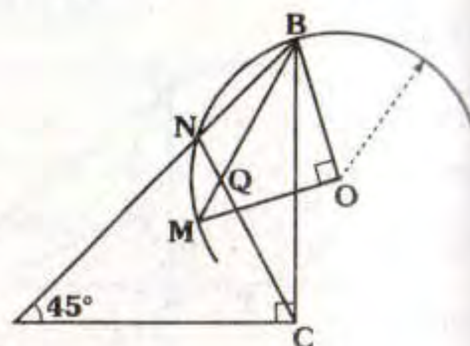
A) 1

B) 2/3

C) 3/2

D) 4/3

E) 3/4



PROBLEMA Nº 42

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BN, en $\overline{BN}$ se ubica M, en la prolongación de $\overline{AM}$ se ubica Q tal que m∢AMN = m∢CMQ. Si AB=c; BC=a, MN=m y CM=n. Indique la relación entre a,b,m y n.

A) cn=m(a+c)

B) ab=mn

C) cn=am

D) cn=a(m+n)

E) cm=n(a+c)

PROBLEMA Nº 43

En el gráfico, G_1 y G_2 son baricentros de los triángulos ABD y BCD respectivamente. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y AA'+ BB' = 9.

Calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

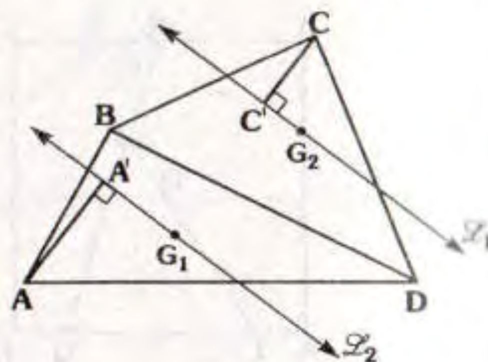
A) 4,5

B) 6

C) 4

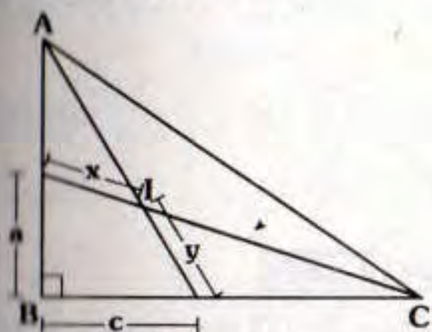
D) 8

E) 9



PROBLEMA Nº 44

Indique la relación correcta, siendo I el incentro del triangulo ABC.



A) $ac=xy$ B) $ax=cy$ C) $ay=cx$

D) $cx^2=ay^2$ E) $xa^2=yc^2$

PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, T y Q son puntos de tangencia y el triángulo MNB es equilátero. Si QH=3, Calcule HC.

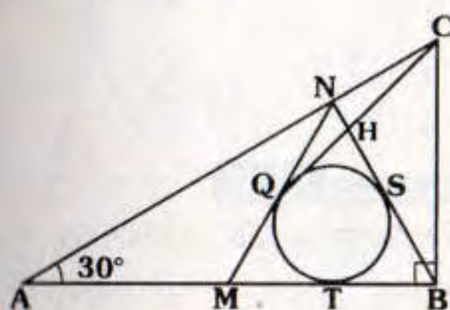
A) 3

B) 4

C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 46

En el gráfico, BM=12 y MQ=3. Calcule QS

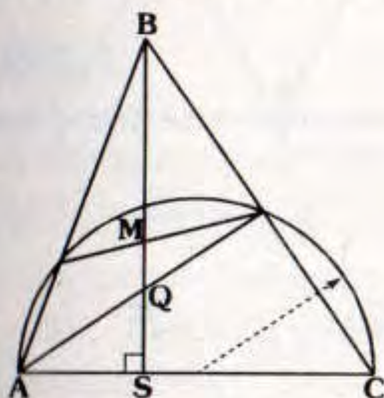
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, PQ=3 y QR=2. Calcule RC.

A) 8

B) 9

C) 10

D) 12

E) 14



PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, AP=7 y BP=2. Calcule BQ (P, R y Q son puntos de tangencia)

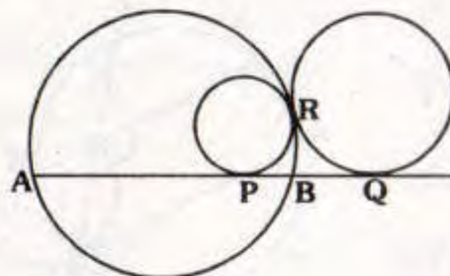
A) 5

B) 3

C) 4,8

D) 3,6

E) 5,1



PROBLEMA Nº 49

En el triángulo ABC, la mediana BM y la bisectriz interior AQ son perpendiculares. Si BC=9, calcule QC.

A) 8 B) 6 C) 7

D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, ABCDEF es un hexágono regular. Si MJ=3(JL), calcule $m\overset{\frown}{JF}$.

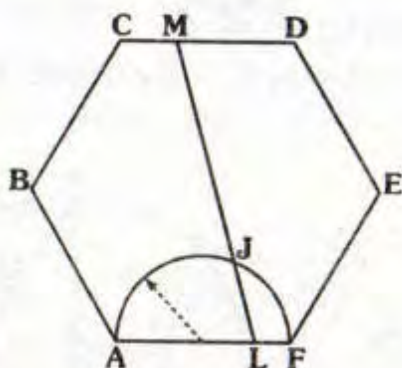
A) 45°

B) 30°

C) 53°

D) 60°

E) 90°



PROBLEMA Nº 51

En el gráfico, B es punto de tangencia, si $\overline{MN} // \overline{AB}$ y 3(PQ)=2(BQ). Calcule $\dfrac{MN}{AB}$.

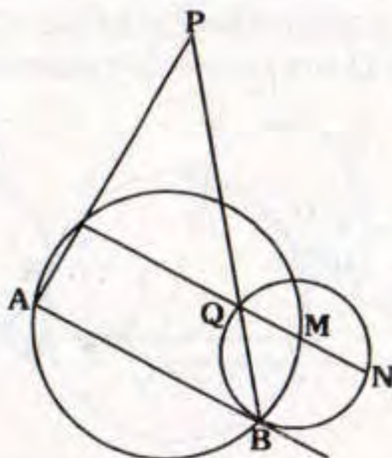
A) 2/5

B) 1/5

C) 3/5

D) 4/5

E) 3/10



PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, 5(DE)=2(AD) y BC=12. Calcule AB.

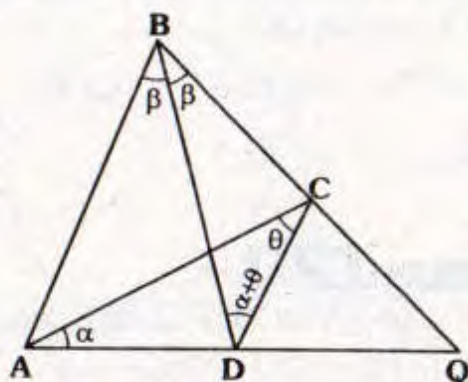
A) 9

B) 12

C) 15

D) 18

E) 24



PROBLEMA Nº 53

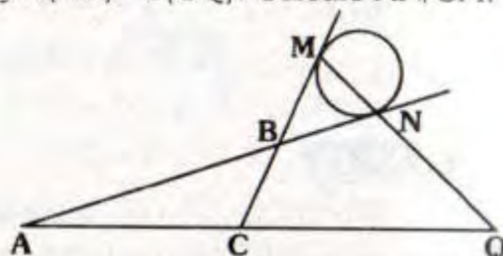
En el triángulo ABC, m∢ABC = 150°, se traza la ceviana interior BR tal que m∢ABR = m∢ACB = x. Si AR=2 y RC=3. Calcule x.

A) 18,5° B) 15° C) 22,5°

D) 26,5° E) 23°

PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, M y N son puntos de tangencia y 3(AC)=2(CQ). Calcule AN/CM.

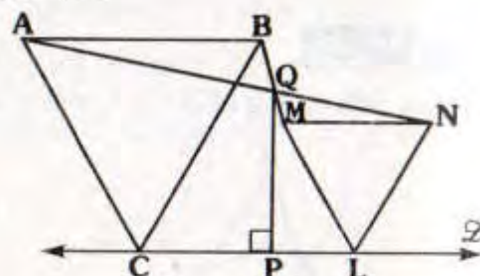


A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{5}{2}$

D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{3}{5}$

PROBLEMA Nº 55

Los triángulos ABC y LMN son equiláteros. Si AB=a, MN=b y $\overline{AB} // \overline{MN} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Calcule PQ.



A) $\dfrac{a^2}{b}$ B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{b}$ C) $\dfrac{ab\sqrt{3}}{a+b}$

D) $\dfrac{b\sqrt{3}}{a}$ E) $\dfrac{2ab\sqrt{3}}{a+b}$

PROBLEMA Nº 56

Del gráfico. Calcule $m\widehat{MB}$.

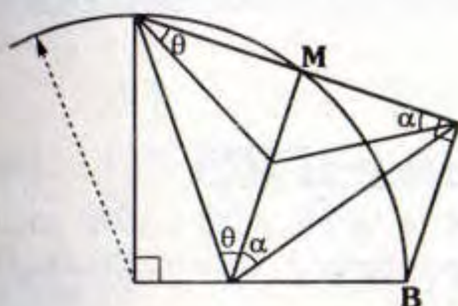
A) 30°

B) 60°

C) 53°

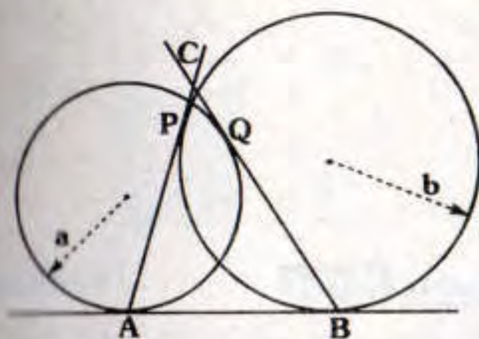
D) 37°

E) 45°



PROBLEMA Nº 57

Calcule el inradio del triángulo ABC (A, P, Q y B son puntos de tangencia)



A) $\dfrac{a+b}{2}$

B) $\dfrac{ab}{a+b}$

C) $\dfrac{2ab}{a+b}$

D) $\sqrt{ab}$

E) $\sqrt{2ab}$

PROBLEMA Nº 58

En el triángulo ABC recto en B, se trazan las bisectrices exteriores AP y CQ, BP=a y BQ=b. Si P' y Q' están en $\overleftrightarrow{AC}$, tal que $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AC}$, $\overline{PQ'} \cap \overline{Q'P} = \{S\}$. Calcule la longitud de la altura del triángulo P'SQ'.

A) $\sqrt{ab}$

B) $\sqrt{2ab}$

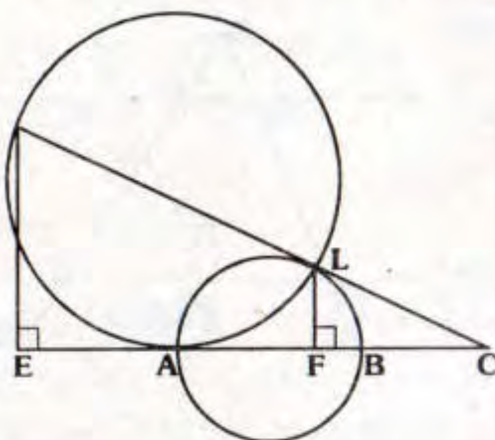
C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\dfrac{2ab}{a+b}$

E) $\dfrac{a+b}{2}$

PROBLEMA Nº 59

En el gráfico, A y L son puntos de tangencia. Si AB=4(BC). Calcule EF/FC.



A) 2

B) 4

C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{4}$

E) 3

PROBLEMA Nº 60.

En un triángulo, las longitudes de los lados están en progresión aritmética.

Calcule la razón entre el inradio y la longitud de la altura relativa al lado intermedio.

A) $\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{1}{4}$

D) $\dfrac{2}{3}$

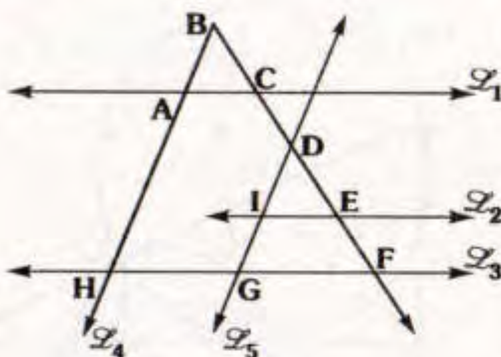
E) $\dfrac{1}{5}$



PROBLEMA Nº 61 (Seminario)

En la figura: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_5}$ AB=DE=3, IG=5, EF=6, HG=3(IE).

Calcule CD–BC.



A) 1,5

B) 1,8

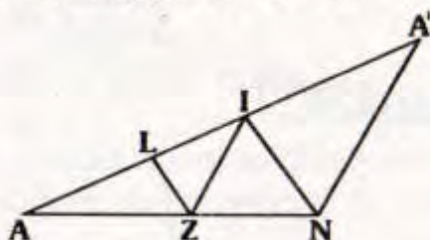
C) 2

D) 2,28

E) 2,4

PROBLEMA Nº 62 (Práctica)

En la figura mostrada se cumple que: $\overline{ZL} // NI$ y $\overline{ZI} // \overline{NA'}$. Si $AL = k_1$ y $LI = k_2$ entonces la longitud de $\overline{IA'}$ es:



A) $\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

B) $\dfrac{k_1}{k_2}(k_2+k_1)$

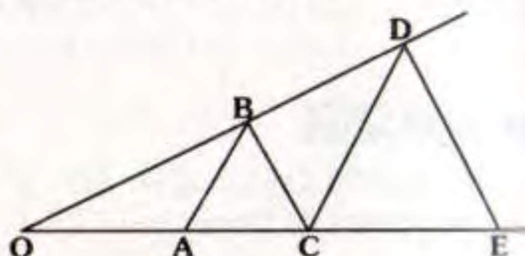
C) $\dfrac{k_2}{k_1}(k_2+k_1)$

D) $\sqrt{k_1k_2}$

E) $\dfrac{k_1+2k_2}{k_1}$

PROBLEMA Nº 63 (Seminario)

De la figura, ABC y CDE son triángulos equiláteros. Si AB=m, CD=n. Halle OA.



A) $\dfrac{n^2}{n+m}$

B) $\dfrac{n^2}{n-m}$

C) $\dfrac{m^2}{n+m}$

D) $\dfrac{m^2}{n-m}$

E) $\dfrac{m^2}{2n+m}$

PROBLEMA Nº 64 (Seminario)

Sea el triángulo ABC, $D \in \overline{AC}$ tal que AD=DC, $E \in \overline{AD}$ tal que $\overline{EF} // \overline{DB}$, $F \in \overleftrightarrow{CB}$, $\overline{AB} \cap \overline{EF} = \{T\}$. Si BF=6 y BC=9 y AT=4. Halle BT.

A) 4

B) 6

C) 8

D) 9

E) 10

PROBLEMA Nº 65 (Seminario)

Se tiene un triángulo ABC en el cual se trazan las cevianas $\overline{BP}$ y $\overline{AQ}$ intersectándose en el punto M. Si 2AM=3MQ; 2BQ=QC y PC=L, halle AP.

A) 2L

B) L/2

C) $\dfrac{3}{2}$L

D) $\dfrac{4}{3}$L

E) $\dfrac{5}{3}$L

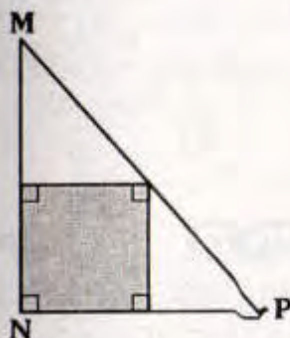
PROBLEMA Nº 66 (Seminario)

En un triángulo ABF se traza la mediana $\overline{BE}$, $D \in \overline{EF}$, $P \in \overline{BF}$, $\overline{DP} // \overline{BE}$, $\overleftrightarrow{DP} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{C\}$, AB=11, BC=7, BP=14, halle PF.

A) 6,5 B) 7,5 C) 8
D) 8,5 E) 9

PROBLEMA Nº 67 (Práctica)

Si MN=p y NP=m, entonces el perímetro del cuadrado que limita la región sombreada es:



A) $\dfrac{4pm}{p+m}$ B) $\dfrac{pm}{(p+m)}$ C) $\dfrac{4pm}{p+2m}$
D) $\dfrac{4pm}{m+2p}$ E) $\dfrac{pm}{p+m}$

PROBLEMA Nº 68 (Seminario)

Sobre los lados de un triángulo escaleno ABC se construye exteriormente los triángulos equiláteros APB y BQC tal que CP=6. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$.

A) 5 B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 69 (Seminario)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$, luego se traza la bisectriz exterior BQ, $F \in \overline{AB}$, $\overline{FC} // \overline{BQ}$, $\overline{BP} \cap \overline{FC} = \{R\}$, halle (AP)(BR).

A) 2AQ.PR B) AQ.PR C) 3AQ.PR
D) 4Q.PR E) 5AQ.PR

PROBLEMA Nº 70 (Seminario)

En un triángulo ABC, $\overline{BD}$ es bisectriz, BM es mediana e I es el incentro $AI \cap \overline{BM} = \{P\}$, $CI \cap \overline{BM} = \{Q\}$, $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{3}{2}$, BP=6, QM=4. Halle PQ.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 71 (Seminario)

En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita al triángulo es tangente al lado $\overline{AB}$ en M, al lado $\overline{BC}$ en N y al lado $\overline{AC}$ en el punto Q. La prolongación de $\overline{MN}$ intersecta a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en el punto F. Si AQ=5u y QC=4u, entonces la longitud de $\overline{CF}$ es:

A) 34u B) 36u C) 38u
D) 40u E) 42u

PROBLEMA Nº 72 (Seminario)

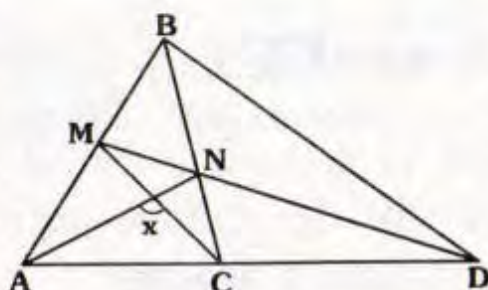
Dado un triángulo ABC de baricentro G, en él se traza la mediana $\overline{BM}$, luego se traza la bisectriz interior $\overline{AE}$ del triángulo ABM, la prolongación de $\overline{CG}$ intersecta a $\overline{AE}$ en D. Halle $\dfrac{AD}{DE}$. Si AB=5 y AC=8.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 73 (Examen parcial)

En la figura mostrada, m∢ABC = 40°, m∢CBD = 70°, $\overline{AN}$ es bisectriz del ángulo A. Calcule x.



A) 80°

B) 90°

C) 100°

D) 110°

E) 135°

PROBLEMA Nº 74 (Seminario)

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AM}$, $\overline{CN}$ y $\overline{BQ}$, ($M \in \overline{BC}$, $N \in \overline{AB}$ y $Q \in \overline{AC}$). La prolongación de $\overline{NM}$ intersecta a la prolongación de $\overline{AC}$ en T. Si AQ=5 cm y QC=2 cm. Halle CT(en cm).

A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{14}{3}$

D) 5 E) $\frac{26}{5}$

PROBLEMA Nº 75 (Práctica)

En un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q en los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ se trazan los rayos $\overline{PM}//\overline{AB}$; $\overline{QN}//\overline{BC}$. Si además $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son tangentes a la circunferencia inscrita y MN=a; MC=b, entonces AN mide:

A) $\frac{a(a+b)}{b-a}$ B) $\frac{a+b}{b-a}$ C) $\frac{b(a+b)}{b-a}$ D) $\frac{a+b+c}{2}$

E) $\frac{a+b+c}{b-a}$

PROBLEMA Nº 76 (Seminario)

En un triángulo PQR acutángulo, se traza la bisectriz interior PA, luego se trazan los segmentos $\overline{QM}$ y $\overline{RN}$ perpendiculares a dicha bisectriz, y a su prolongación, en donde M es un punto interior del triángulo; si: AM=a y AN=b. Halle PM.

A) $\frac{a(a-b)}{a+b}$ B) $\frac{a(a+b)}{a-b}$ C) $\frac{a(a+b)}{b-a}$

D) $\frac{a(b+a)}{a+b}$ E) $\frac{b(a+b)}{a-b}$

PROBLEMA Nº 77 (Seminario)

En un triángulo ABC (AB>BC) se traza la bisectriz exterior $\overline{BF}$ ($F \in \overleftrightarrow{AC}$). La mediatriz de $\overline{BF}$ intercepta a $\overline{CF}$ en M.

Si: AM.CM= $16u^2$. Halle FM (en u).

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº 78

En un trapezoide ABCD, G_1 es el baricentro de la región ABD. G_2 es el baricentro de la región triangular ACD. $\overline{BG_2}$ interseca a $\overline{CG_1}$ en G. Se traza una recta secante r que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y pasa por G. Si $d(A,\overleftrightarrow{r})+d(D,\overleftrightarrow{r})=15$, $d(B,\overleftrightarrow{r})=8$ halle d(C, r).

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 11

PROBLEMA Nº 79 **(Seminario)**

En un triángulo ABC obtuso en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BM}$ y las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CQ}$ respectivamente, si AN=a, CQ=b. Calcule la longitud de la altura trazada de M en el triángulo BMC.

A) $\dfrac{a-b}{a+b}$ B) $\dfrac{ab}{a+b}$ C) $\dfrac{ab}{2a-b}$

D) $\dfrac{ab}{2a+b}$ E) $\dfrac{ab}{3a+b}$

PROBLEMA Nº 80 **(Seminario)**

En un triángulo ABC se trazan las alturas AH y CI. Si AC=L y el ángulo ABC mide [illegible]°, entonces HI es:

A) L B) 2L C) 3L

D) $\dfrac{L}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}L$

PROBLEMA Nº 81 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, I es el incentro y E es el excentro relativo al lado $\overline{AC}$. Si AB=6u, BE=10u y BI=4u, entonces la longitud de BC es:

A) 6u B) 7u C) 8u

D) 9u E) 11u

PROBLEMA Nº 82 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, AB=6, el segmento que une A con el incentro mide 5, y el segmento que une el incentro con el excentro relativo a BC mide 7, calcule AC.

A) 8 B) 9 C) 10

D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 83 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, m∢ABC = 106°. Si AB=c, BC=a. Halle la longitud de la menor bisectriz interna del triángulo.

A) $\dfrac{2ac}{a+c}$ B) $\dfrac{3ac}{4(a+c)}$ C) $\dfrac{6ac}{5(a+c)}$

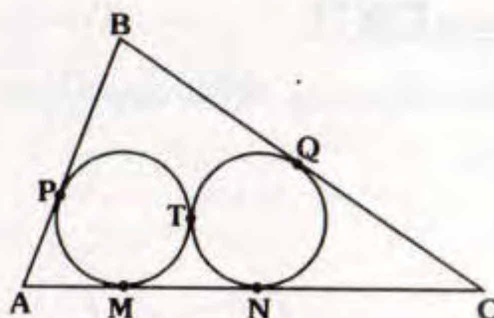
D) $\dfrac{7ac}{a+c}$ E) $\dfrac{8ac}{5(a+c)}$

PROBLEMA Nº 84 **(Seminario)**

En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura $\overline{BB'}$; AC=b; BB'=h se inscribe el cuadrado EFGH; $\overline{EH} \subset \overline{AC}$ y $F \in \overline{AB}$; $G \in \overline{BC}$; en el triángulo FGH, se inscribe el cuadrado MNPQ; $\overline{MQ} \subset \overline{FG}$ y $N \in \overline{FB}$; $P \in \overline{BG}$; en el triángulo NBP se inscribe un tercer cuadrado y así sucesivamente. Demuestre que la longitud del lado del enésimo cuadrado es: $\dfrac{bh^n}{(b+h)^n}$

PROBLEMA Nº 85 **(Práctica)**

Las circunferencias son congruentes, de radios: r; AC=b. M,N,P,Q,T son puntos de tangencia. Halle la longitud del inradio.



A) $\dfrac{br}{b+r}$ B) $\dfrac{2br}{b+r}$ C) $\dfrac{br}{b-2r}$

D) $\sqrt{b^2+r^2}$ E) $\sqrt{\dfrac{br}{3}}$

PROBLEMA Nº 86 **(Seminario)**

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y por A se traza una tangente. Por el punto medio de $\overline{AB}$ se traza una paralela a dicha tangente que intercepta a $\overline{AC}$ en N. Si AN=a y NC=b, calcule AB.

A) $\sqrt{2a(a+b)}$ B) $\sqrt{a(a+b)}$

C) $\sqrt{b(a+b)}$ D) $\sqrt{2b(a+b)}$

E) $\sqrt{2ab}$

PROBLEMA Nº 87 **(Examen parcial)**

En la figura, AP=PE. Si AM=a y BM=b, halle BL:

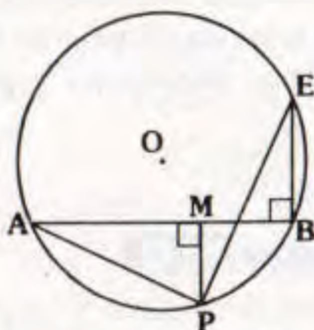
A) $\frac{b}{a}(2a-b)$

B) $a-2b$

C) $a-b$

D) $\sqrt{ab}$

E) $\frac{b}{a}(a-b)$



PROBLEMA Nº 88 **(Práctica)**

En la figura mostrada, MN=24u y $\frac{AB}{AN}=\frac{3}{8}$. Halle BQ.

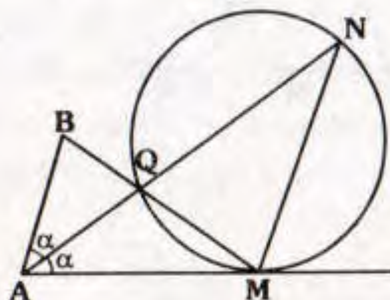
A) 4,5

B) 6

C) 7,5

D) 8

E) 9



PROBLEMA Nº 89 **(Seminario)**

En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia el producto de las distancias de un punto de la circunferencia a dos lados opuestos es $8u^2$. Calcule el producto de las distancias del mismo punto a los otros dos lados

A) $8u^2$ B) $16u^2$ C) $8\sqrt{2}\,u^2$

D) $8\sqrt{3}\,u^2$ E) $16\sqrt{2}\,u^2$

PROBLEMA Nº 90 **(Seminario)**

Dos circunferencias son tangentes exteriores y sus radios miden R y r (R>r). Si $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=0,25$, calcule la distancia desde el punto de tangencia a la tangente común exterior.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 91 **(Seminario)**

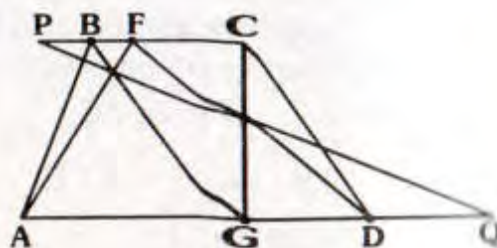
Tres circunferencias tangentes están inscritas en un ángulo. Si los radios de la circunferencias exteriores miden 35m y 315m, entonces el radio de la circunferencia intermedia es:

A) 105 B) 115 C) 125

D) 150 E) 175

PROBLEMA Nº 92 **(Examen parcial)**

En la figura, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, PB=2, AD=3BC. Halle la longitud de $\overline{DQ}$.



A) 4 B) 5 C) 6

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 93 **(Examen parcial)**

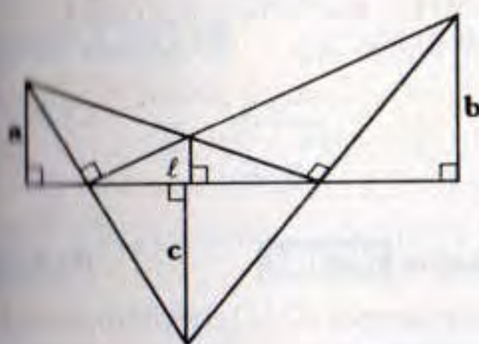
Sobre los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo rectángulo ABC se construyen externamente los cuadrados ABFE y BCQP respectivamente, $\overline{EC} \cap \overline{AB} = \{M\}$, $\overline{AQ} \cap \overline{BC} = \{N\}$. Si AM=4u y CN=9u. Calcule AB.

A) 8u B) 10u C) 12u

D) 15u E) 20u

PROBLEMA Nº 94 **(Seminario)**

Demostrar en la figura: $\dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.



PROBLEMA Nº 95 **(Seminario)**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AF}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CE}$ concurrentes en O tal que $m\measuredangle BMF = m\measuredangle FMC = 55°$.

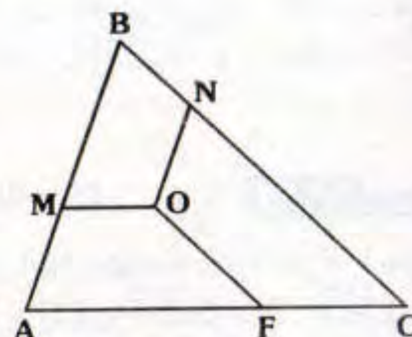
Calcule $m\measuredangle EMB$.

A) 25° B) 30° C) 35°

D) 45° E) 55°

PROBLEMA Nº 96 **(Seminario)**

En la figura, OM=ON=OF; $\overline{ON} // \overline{AB}$, $\overline{OF} // \overline{BC}$ y $\overline{OM} // \overline{AC}$. Si BN=a, CF=b y AM=c. Calcule OM.



A) $b\sqrt{\dfrac{a}{c}}$ B) $\dfrac{ac}{b}$ C) $c\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

D) $\sqrt[3]{abc}$ E) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

PROBLEMA Nº 97 **(Seminario)**

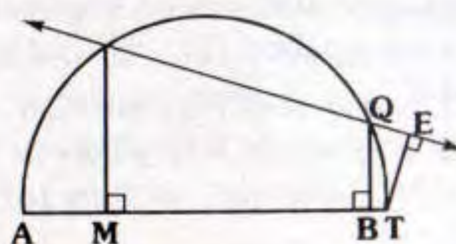
En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza por un punto M de $\overline{AB}$ un rayo paralelo a $\overline{AC}$ que intercepta a $\overline{BC}$ en F y a la perpendicular a $\overline{BC}$ trazada en C en N. Si los inradios de los triángulos MBF y FCN miden 1 y 9, halle el inradio del triángulo ABC.

A) 9 B) 8 C) 10

D) 5 E) 12

PROBLEMA Nº 98 **(Seminario)**

En la figura mostrada, $\overline{AT}$ es diámetro de la semicircunferencia. Si MB=a y TB=b. Calcule BE.



A) $\sqrt{(a+b)b}$　　B) $\sqrt{(a+b)a}$

C) $2\sqrt{ab}$　　D) $\dfrac{ab}{a+b}$

E) $\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 99 **(Seminario)**

En la figura, F es circuncentro del ΔABC. Si $AB=15\sqrt{2}$, $BE=6\sqrt{5}$ y $EC=2\sqrt{10}$. Hallar BC.

A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

E) 11

PROBLEMA Nº 100 **(Seminario)**

En la figura mostrada, calcular **r**, si ON=2 y MN=6. (O es centro)

A) $\sqrt{3}$

B) 2

C) $2\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$

E) 5

PROBLEMA Nº 101 **(Examen parcial)**

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior CP (P en $\overline{AB}$) y en $\overline{AC}$ se toma el punto Q tal que $m\sphericalangle CPB = m\sphericalangle PQA$. Calcular AC, si AP=8, PC=12 y PQ=6.

A) 8　　B) 10　　C) 12

D) 14　　E) 16

PROBLEMA Nº 102 **(Práctica)**

En la figura, AC=2(BC) y BD=5. Hallar AB

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

PROBLEMA Nº 103 **(Práctica)**

ABC es un triángulo isósceles (AB=BC), M, N y H son puntos de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, donde MB=2(AM), MN=MH, $m\sphericalangle NHC = m\sphericalangle NMH = 90°$ y NH=4. Hallar AC.

A) 2　　B) 3　　C) 4

D) 5　　E) 6

PROBLEMA Nº 104 **(Práctica)**

Por los extremos A y D del diámetro de una semicircunferencia se trazan tangentes. Una tangente interseca a las otras dos en B y C respectivamente. Hallar la distancia trazada del punto de tangencia al diámetro, si AB=10 y CD=6.

A) 7,5　　B) 7　　C) 6,5

D) 8,5　　E) 8

PROBLEMA Nº 105 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{CF}$ y luego por F, una paralela a $\overline{AC}$, de modo que intercepta a $\overline{BC}$ en Q. Si BC=5m y AC=6m, entonces la magnitud de $\overline{BQ}$ (en m).

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{9}{11}$

D) $\frac{20}{11}$ E) $\frac{25}{11}$

PROBLEMA Nº 106 **(Examen parcial)**

En la figura mostrada, AM=5u y MC=4u. Halle el radio de la circunferencia.

A) 3,75u

B) 4u

C) 4,5u

D) 4,75u

E) 5,25u

PROBLEMA Nº 107 **(Seminario)**

Sea la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, $\overline{FH} \perp \overline{AB}$, $\overline{AQ} \cap \overline{FH} = \{M\}$, F y Q son puntos de la circunferencia, si AF=6u y AM=5u, $\overline{FH}\cap$ circunferencia={N}. Halle (FM)(MN).

A) $13u^2$ B) $9u^2$ C) $12u^2$

D) $10u^2$ E) $11u^2$

PROBLEMA Nº 108 **(Seminario)**

En la figura, DE+2(AD)=EB. Hallar x.

A) 9°

B) 15°

C) 20°

D) 22,5°

E) 23°

PROBLEMA Nº 109 **(Seminario)**

En la figura, $\overline{MQ}//\overline{NP}$, $\overline{NQ}//\overline{BC}$, AQ=12(CP), AM=4u y BN=2,5u. Calcule OP/ON.

A) 1/3

B) 1/4

C) 1/5

D) 1/2

E) 2/5

PROBLEMA Nº 110 **(Seminario)**

En la figura O es centro. Halle la m∢ABC, si AD. EC = $16u^2$ y DE=4.

A) 110°

B) 120°

C) 135°

D) 150°

E) 165°

PROBLEMA Nº 111 **(Seminario)**

Sea el triángulo BAC isósceles ($\overline{BA} \cong \overline{AC}$), en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto D tal que CD=BC. En el lado $\overline{AB}$ se ubican los puntos E y F tal que: EA=EB y $FA = \frac{AB}{3}$. Los segmentos ED y FD interceptan al lado $\overline{AC}$ en los puntos G y H; los segmentos EH y FG se interceptan en el punto M y la prolongación de $\overline{DM}$ interceptan al lado $\overline{AB}$ en el punto K. Si AB=10u, entonces la longitud de EK (en u) es:

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 112 **(Práctica)**

En un triángulo ABC isósceles $(\overline{AB} \cong \overline{BC})$, se traza la altura $\overline{AH}$. Se ubica P en $\overline{AH}$ tal que $m\measuredangle BPC = 90°$. Si $AC = \ell$, entonces PC es:

A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{2\ell}{3}$ C) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{3\ell}{4}$

PROBLEMA Nº 113 **(Práctica)**

En un triángulo ABC, donde BC=2AB, se traza la altura $\overline{BH}$ tal que $m\measuredangle HBC = 3m\measuredangle ABH$. Si AH=2, halle HC.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 16

PROBLEMA Nº 114 **(Práctica)**

En un triángulo ABC, si $m\measuredangle B = 120$, AB=5cm y BC=15cm. Se traza la bisectriz interior $\overline{BE}$. Halle la longitud de $\overline{BE}$ (en cm).

A) $\frac{15}{12}$ B) $\frac{15}{10}$ C) $\frac{15}{8}$
D) $\frac{15}{4}$ E) 15

PROBLEMA Nº 115 **(Seminario)**

Por el incentro de un triángulo ABC se trazan dos rectas paralelas hacia $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; las cuales interceptan a $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente. Si AB=10cm, BC=14cm y AC=12cm. Halle MN(en cm)

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 116 **(Seminario)**

En una recta L se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se trazan las semicircunferencias C_1 y C_2 en un mismo semiplano, L_2 es recta tangente a C_1 y C_2 en T y S respectivamente, las prolongaciones de $\overline{TB}$ y $\overline{SC}$ se interceptan en el punto Q, en $\overline{TS}$ se ubica E de manera que $m\measuredangle TBE = 90°$, TB=8u, TE=4ES. Halle BQ en u.

A) 1,5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 117 **(Examen parcial)**

ABCD y DEFG son cuadrados en donde A, D y G pertenecen a la recta L, la prolongación de $\overline{BE}$ intercepta a $\overline{FG}$ en P y L en Q, si BE=5u y EP=2u, halle PQ en u.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{4}{3}$
D) 3 E) 4

PROBLEMA Nº 118 **(Examen parcial)**

En un triángulo ABC, 2BC=7AB se traza la altura BH de manera que la $m\measuredangle HBC = 3m\measuredangle ABH$, halle AH/HC.

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{7}$

PROBLEMA Nº 119 (Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AN}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$. ($N \in \overline{BC}$; $Q \in \overline{AC}$; $M \in \overline{AB}$) concurrentes en I. Si $\frac{MB}{MA}+\frac{BN}{NC}=\frac{3}{4}$, entonces $\left(\frac{BI}{IQ}\right)$ es.

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{7}$

PROBLEMA Nº 120 (Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ y $\overline{BF}$. La recta PQ intercepta a la altura $\overline{BF}$ en el punto T, a la prolongación de $\overline{CA}$ en el punto R. Si QT=3u y TP=2u, entonces PR es:

A) 8u B) 9u C) 10u

D) 11u E) 12u

PROBLEMA Nº 121 (Seminario)

En un triángulo rectángulo ABC se trazan dos rectas perpendiculares a la hipotenusa $\overline{AC}$ en los puntos P y Q las cuales son tangentes a la circunferencia inscrita al triángulo (AP<AQ); tal que $AP.CQ=72u^2$.

Calcule el radio de dicha circunferencia.

A) 4 B) 8 C) 5

D) 6 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 122 (Seminario)

Sea una circunferencia de centro I, inscrita en un triángulo ABC, AB=13cm, BC=14cm y AC=15cm. $P \in \overline{BC}$ y es punto de tangencia; $Q \in \overline{BC}$ tal que $\overline{AQ}$ es bisectriz del ángulo A. Calcule PQ.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 123 (Seminario)

Sea el trapezoide asimétrico ABCD, M y N son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; E y F pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tal que E, M, N y F son colineales. BE=3, AE=9 y FD=4. Halle FC.

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 124 (Seminario)

En un cuadrilátero convexo ABCD, $m\measuredangle A=90°$, por B y C se trazan las rectas paralelas a $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ que interceptan a sus diagonales en M y N respectivamente. Si MC=17u y CN=15u. Halle MN en u:

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 125 (Seminario)

En un triángulo ABC; se traza la mediana $\overline{BM}$, en los triángulos ABM y BMC se trazan las bisectrices $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ (D y E están en $\overline{BM}$). Si BD=3, EM=2 y $\frac{AB+AC}{AC}=\frac{3}{2}$. Halle DE.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$ E) 1

PROBLEMA Nº 126 (Práctica)

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, I es el incentro, IA=7, $IC = 8\sqrt{2}$. Halle IB

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 4

D) $\frac{56}{17}\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA Nº 127 (Práctica)

Desde un punto exterior A; de una circunferencia C, se trazan la tangente $\overleftrightarrow{AT}$ y la secante AQN, B está en la prolongación $\overline{TQ}$ tal que $m\measuredangle BNQ = m\measuredangle TAQ$, $\overline{BN} \cap C = \{M\}$, si AT=16 y BM=4, halle MT.

A) 4 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 128 (Práctica)

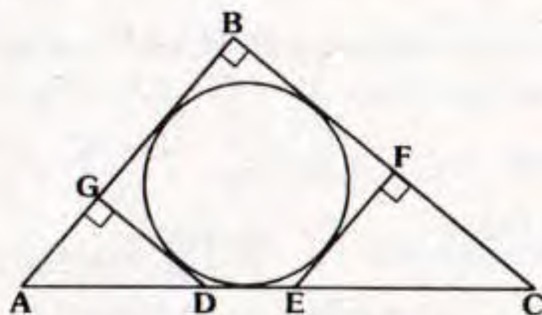
El perímetro de un triángulo ABC es 25, la bisectriz interior AD=10 y BC=5. Halle la distancia del incentro al vértice A.

A) 8 B) 9 C) 10

D) 11 E) 12

PROBLEMA Nº 129 (Seminario)

En la figura AD=4 y EC=5, halle DE. (aproximadamente).

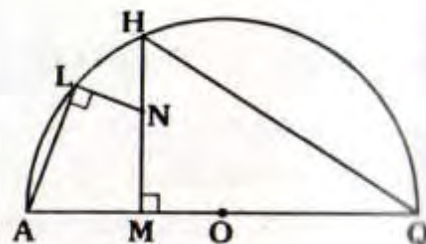


A) 1,50 B) 1,80 C) 1,84

D) 1,90 E) 1,92

PROBLEMA Nº 130 (Seminario)

En la figura $\overline{MN} \cong \overline{NH}$, si: $HQ = 2\sqrt{6}$ y OQ=3. Halle la longitud de $\overline{LN}$.



A) $\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{6}$

E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 131 (Seminario)

En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura BH, luego se ubican los puntos medios, M de $\overline{BC}$ y N de $\overline{BH}$ tal que AM=2AN. Halle la $m\measuredangle C$.

A) 15 B) 20 C) 25

D) 30 E) 35

PROBLEMA Nº 132 (Examen parcial)

En el triángulo ABC escaleno, BC=2 y AB+AC=10, siendo E el excentro relativo a $\overline{BC}$. Si por E se traza una paralela a $\overline{BC}$ de manera que intercepte a las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en P y Q respectivamente. Halle PQ.

A) 2,0 B) 2,5 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 133 (Examen parcial)

En un triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ intercepta a $\overline{BC}$ en P y a la prolongación de $\overline{AB}$ en Q. Si $OP \times OQ = 36m^2$. Halle el radio si O es el circuncentro.

A) 3m B) 4m C) 5m

D) 6m E) $3\sqrt{2}$m

PROBLEMA Nº 134 **(Examen parcial)**

En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BAC intercepta a $\overline{BC}$ en D. Si AB–BD=a y AC+CD=b. Halle AD.

A) a+b B) 2a – b C) $2\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$

PROBLEMA Nº 135 **(Examen parcial)**

En un triángulo ABC se trazan las alturas CM y AH; en $\overline{AC}$ se ubica el punto E y en el exterior y relativo a $\overline{AC}$ se ubica el punto D tal que ED=EC, T∈$\overline{MD}$, $\overline{ET}\perp\overline{MD}$, m∢ACB = m∢MDE, MT=TD, si ET=5. Calcule AH.

A) 5 B) 7 C) 9

D) 10 E) 11

PROBLEMA Nº 136 **(Seminario)**

En un paralelogramo ABCD se traza una recta que pasa por el vértice D e intercepta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AB}$ en los puntos R, Q y P respectivamente. Si QR=3u, RD=4u. Halle PQ(en u)

A) 1/3 B) 2/3 C) 4/3

D) 5/3 E) 7/3

PROBLEMA Nº 137 **(Seminario)**

Se tiene una circunferencia inscrita en un triángulo ABC, AB=9cm, BC=7cm y AC=8cm, M∈$\overline{AB}$ y N∈$\overline{BC}$ tal que $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$. Halle MN

A) 1/3 B) 2/3 C) 4/3

D) 5/3 E) 8/3

PROBLEMA Nº 138 **(Seminario)**

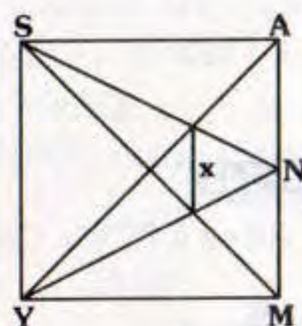
Sea una circunferencia inscrita en un trapezoide asimétrico ABCD, M∈$\overline{AB}$ y N∈$\overline{CD}$ tal que M y N son puntos de tangencia $\overline{MN}\cap\overline{AC}$: {I}, AM=4cm, IC=10cm y NC=8cm. Halle AI (en cm).

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2

D) $\sqrt{5}$ E) 5

PROBLEMA Nº 139 **(Seminario)**

SAMY es un cuadrado de lado "ℓ". N es punto medio de AM. Calcule x en función de ℓ.



A) $\dfrac{2\ell}{3}$ B) $\dfrac{\ell}{3}$ C) $\dfrac{3\ell}{2}$

D) $\dfrac{3\ell}{4}$ E) $\dfrac{\ell}{2}$

PROBLEMA Nº 140 **(Seminario)**

En la figura ABCD y EFMC son cuadrados. Calcule x.

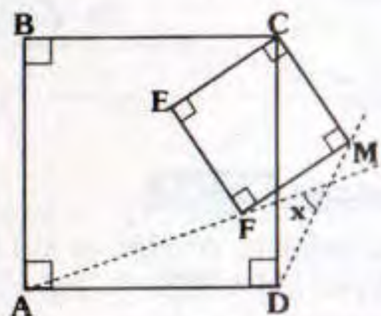
A) 22°30'

B) 30°

C) 37°

D) 45°

E) 60°





Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 141

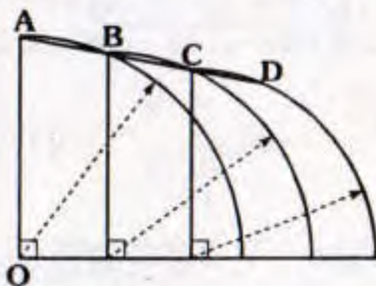
En el triángulo ABC, se ubica D en $\overline{BC}$ y E en la prolongación de $\overline{AC}$. Si $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle CDE$ y 2(AC)=3(CE). Calcule AB/DE.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1

D) $\frac{1}{3}$ E) 2

PROBLEMA Nº 142

En el gráfico, AB=a y BC=b. Calcule CD.



A) $\frac{b^2}{a}$ B) $b\sqrt{\frac{a}{b}}$

C) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ D) $\sqrt{2ab}$

E) $\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 143

En el gráfico, ABNM es un trapecio. Si 2(MN)=3(NP), AB=6, BC=12, PC=5 y x+y>180°. Calcule x.

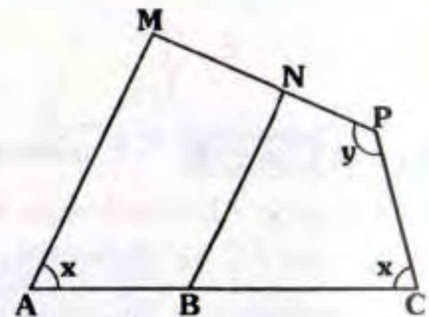
A) 37°

B) 45°

C) 53°

D) 30°

E) 60°



PROBLEMA Nº 144

En el gráfico, ABCD y DEFG son cuadrados. Calcule BM/MF.

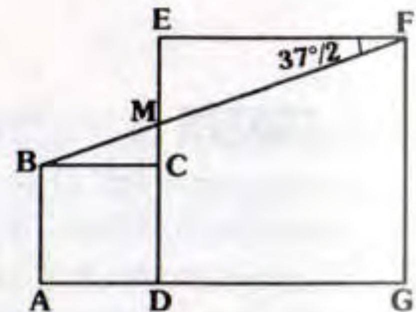
A) 1/3

B) 2/3

C) 1/2

D) 3/4

E) 2/5



PROBLEMA Nº 145

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D en $\overline{AC}$. Se cumple $m\sphericalangle DBC = 60° + m\sphericalangle ABD$, $m\sphericalangle BDC = 30°$ y $(BD)^2 = (AB)(BC)$.

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 15° B) 10° C) 30°

D) 18°30' E) 26°31'

PROBLEMA Nº 146

Sea el triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se traza la altura BH, L es un punto de

$\overline{AH}$, $\overline{CS}$ es altura del triángulo LBC. Si $\overline{BC} \cap \overline{BH} = \{M\}$ tal que BM=2 y MH=3. Calcule (AL)(HC).

A) 10 B) 5 C) 12
D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº 147

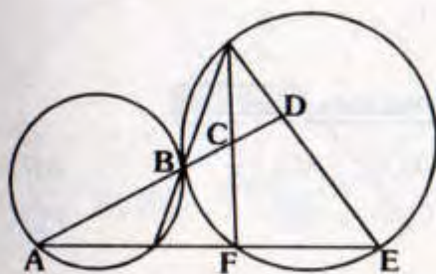
Se tiene el cuadrado ABCD, se trazan las rectas paralelas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ que contienen a C, B y A respectivamente tal que $CD \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{M\}$. Una recta interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ en P, Q y L respectivamente, si CM=2(MD). Calcule PQ/LQ.

A) 1 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, AB=8, CF=3 y CD=2. Calcule DE.

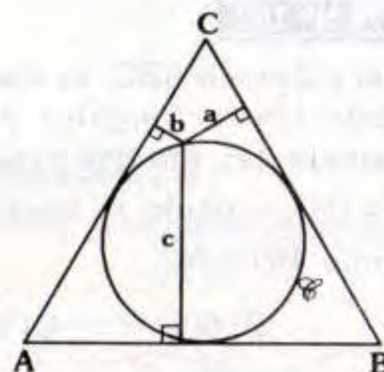
A) $\sqrt{15}$
B) $\sqrt{17}$
C) $\sqrt{21}$
D) $\sqrt{29}$
E) $\sqrt{33}$



PROBLEMA Nº 149

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero ABC.

Calcule $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$.



A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) 1

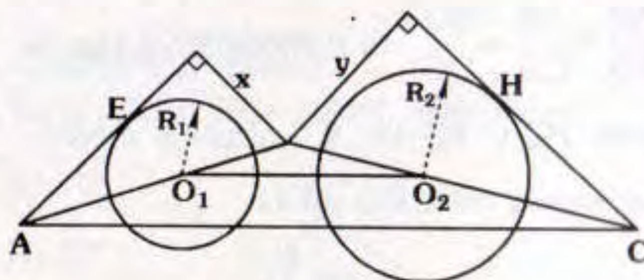
PROBLEMA Nº 150

Se tiene el triángulo ABC (recto en B) se ubica P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si m∢PQR = 90°, m∢QPR = 37° y 3(BQ)=2(RC). Calcule m∢ACB.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 151

En el gráfico, E y H son puntos de tangencia y $\overline{O_1O_2} // \overline{AC}$. Indique la relación entre x, y, R_1 y R_2.



A) $x(R_1)^2 = y(R_2)^2$ B) $x^2R_2 = y^2R_1$
C) $xR_1 = yR_2$ D) $xR_2 = yR_1$
E) $x + R_2 = y + R_1$

PROBLEMA Nº 152

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los rectángulos ABEF y BCPQ semejantes (en ese orden). Si $\overline{AP} \cap \overline{FC} = \{H\}$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{BH}$ y $\overline{AC}$.

A) F.D B) 60° C) 90°
D) 45° E) 106°

PROBLEMA Nº 153

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ABE y BCD. Si $\overline{AD} \cap \overline{EC} = \{Q\}$ y la prolongación de $\overline{BQ}$ corta a $\overline{AC}$ en P, AQ=2; QD=9 y EQ=8. Calcule $\frac{AP}{PC}$.

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{8}{9}$

PROBLEMA Nº 154

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P en $\overline{AD}$ y Q en $\overline{BC}$, tal que $\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{CD} = \frac{BQ}{QC}$. Si la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ es θ, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

A) θ B) $\frac{\theta}{2}$
C) 2θ D) $45° - \theta$
E) $90° - \theta$

PROBLEMA Nº 155

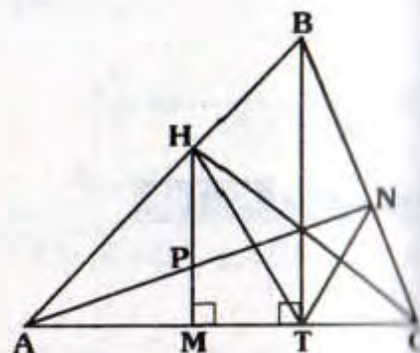
En el triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ secantes en H, M y N son las proyecciones ortogonales de Q y P sobre $\overline{AC}$ respectivamente. Si BQ=2(QA), 2(PC)=3(PB) y AS=5, calcule NC.

A) 9 B) 12 C) 18
D) 21 E) 27

PROBLEMA Nº 156

En el gráfico, AP=PN, TN=a y HT=b. Calcule HP/PM.

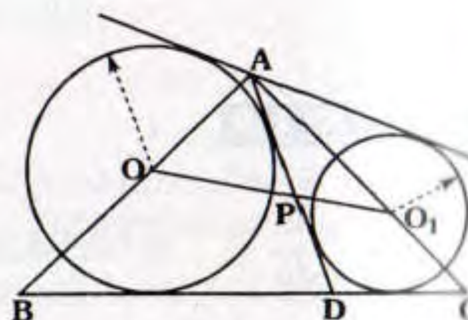
A) $\frac{b}{a}$
B) $\frac{2b-a}{a}$
C) $\frac{2a-b}{b}$
D) $\frac{2b}{a}$
E) $\frac{a}{b}$



PROBLEMA Nº 157

Si $\frac{AO_1}{O_1C} + \frac{AO}{OB} = a$, calcule $\frac{AP}{PD}$

A) a/2
B) 1/a
C) a
D) 2a
E) 2/a



PROBLEMA Nº 158

Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC, se ubica N en $\overline{OC}$ y M en $\overline{OB}$ tal que m∢ANM = m∢ACB = θ y m∢NMA = m∢ABC = 90°. Calcule m∢AOC.

A) θ B) 90° − θ C) 90° + θ
D) 90° E) 60°

PROBLEMA Nº 159

Dado el triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que los ángulos BAC y MNC son suplementarios. Si 3(AB)=5(MN), NC=6 y AC=16. Calcule la longitud de la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 160

En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 180°$. Calcule x.

A) 135°
B) 120°
C) 105°
D) 106°
E) 90°

A B C E F x

PROBLEMA Nº 161

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH, D está en $\overline{BC}$ tal que $\overline{AD}$ es bisectriz del ∢BAC, I es incentro del triángulo AHB. Si $\overline{ID} \cap \overline{BH}$ = {P} y 2(AC)=3(DC). Calcule AI/IP

A) 2/3 B) 3/2 C) 1
D) 2 E) 1/3

PROBLEMA Nº 162

En el gráfico, A es punto de tangencia. Calcule x.

A) R+r
B) R–r
C) $\sqrt{Rr}$
D) $\sqrt{2Rr}$
E) $2\sqrt{Rr}$

R A Q O r B x P

PROBLEMA Nº 163

En el gráfico, T es punto de tangencia y AT=a. Calcule AB.

A) a
B) $a\sqrt{2}$
C) $a\sqrt{3}$
D) 2a
E) $\frac{3}{2}a$

B A T

PROBLEMA Nº 164

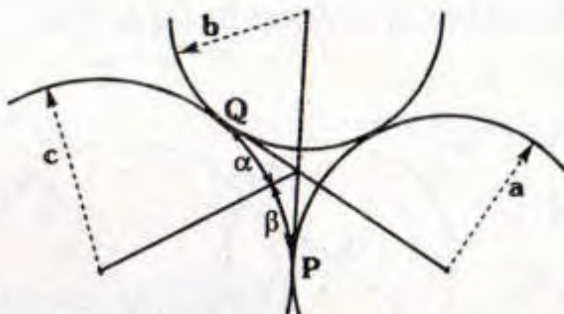
En el gráfico, BC=2(AH). Calcule x.

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 16°
E) 22,5°

B 3x 2x A H C

PROBLEMA Nº 165

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}$



A) $\dfrac{a(b+c)}{b(a+c)}$ B) $\dfrac{ab}{b+c}$ C) $\dfrac{b(a+c)}{a(b+c)}$

D) $\left(\dfrac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}\right)c$ E) $\dfrac{ab}{c}$

PROBLEMA Nº 166

Si BM=MP, calcule $\dfrac{BD}{QC}$

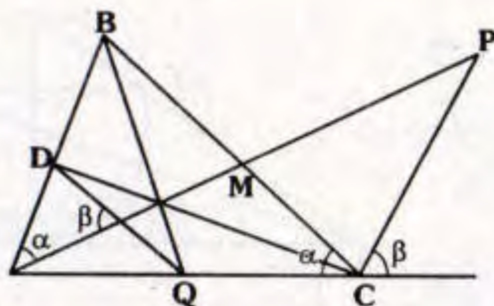
A) 1/3

B) 3

C) 2

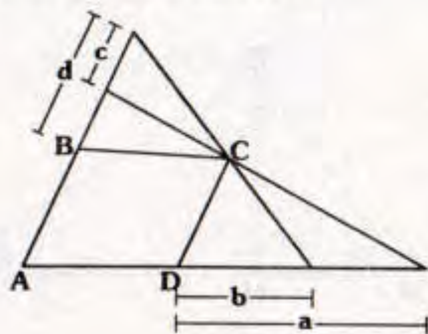
D) 1

E) 1/2



PROBLEMA Nº 167

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo. Indique la relación correcta.



A) ad=bc B) ac=bd

C) a(d–c)=db D) d(a–b)=ca

E) a–b=d–c

PROBLEMA Nº 168

En el gráfico, ABCDE es un pentágono regular. Si BP=a, PQ=b y EF=c, calcule FG.

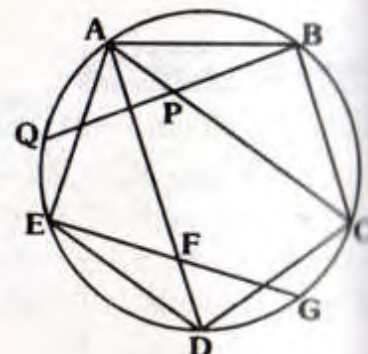
A) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a}$

B) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{c}$

C) $\dfrac{a^2+c^2-ab}{c}$

D) $\dfrac{a^2+ab-c^2}{c}$

E) $\dfrac{a^2+bc-c^2}{b}$



PROBLEMA Nº 169

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica P en $\overline{BC}$ y en $\overline{AP}$ se ubica M tal que AB=MP. La altura MH y la bisectriz AF del triángulo ABM se intersecan en Q. Si $\overleftrightarrow{BQ}\cap\overleftrightarrow{AM}=\{N\}$, MH=a y AB=b, calcule la distancia de N a $\overline{CD}$.

A) a+b B) $\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{2b-a}{2}$ D) $\sqrt{ab}$

E) $\dfrac{2a-b}{2}$

PROBLEMA Nº 170

Se tiene el triángulo ABC de incentro I, se traza la bisectriz interior CD, se traza el paralelogramo ADEF tal que $E\in\overline{BC}$, $F\in\overline{AC}$, $I\in\overline{EF}$, IF=a y BE=b. Calcule BD.

A) $\frac{b}{a}(a+b)$ B) $\frac{a}{b}(a+b)$ C) $\frac{a^2}{b}$

D) $\frac{a}{b}(a+2b)$ E) $\frac{b}{a}(a+2b)$

PROBLEMA Nº 171

En el gráfico, $\overline{BC} // \overline{EF} // \overline{AD}$, $\overline{PC} // \overline{BF} // \overline{ND}$, MQ=MB, AN=AD y (PQ)(AD)=k. Calcule (EQ)(BN).

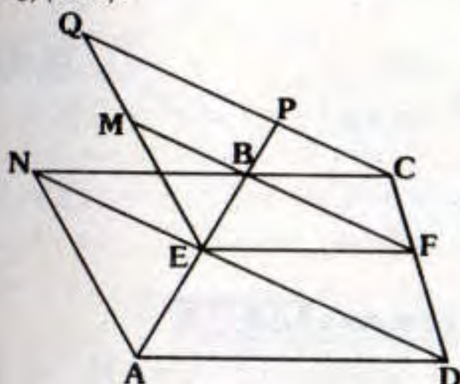
A) 2k

B) 1/k

C) k

D) $k\sqrt{2}$

E) k/2



PROBLEMA Nº 172

Se tiene el cuadrado ABCD, P está en la prolongación de $\overline{DC}$, Q en $\overline{BP}$, $AP \cap \overline{BC} = \{R\}$ y $m\measuredangle QCA = 90°$.

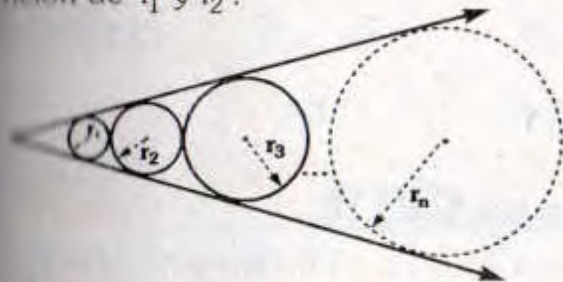
Calcule $m\measuredangle RAD + m\measuredangle QRP$

A) 45° B) 60° C) 75°

D) 90° E) 120°

PROBLEMA Nº 173

En el gráfico, cada circunferencia es tangente a los lados del ángulo y la circunferencia de radio r_2 es tangente a la circunferencia de radio r_1; la de radio r_3, tangente a la de radio r_2 y así sucesivamente. Calcule r_n en función de r_1 y r_2.



A) $r_1^{-n} r_2^{-n+1}$ B) $r_1^{-n} r_2^{n-1}$ C) $r_1^{n-1} r_2^{n-1}$

D) $r_1^{n-1} r_2^{2-n}$ E) $r_2^{n-1} r_1^{2-n}$

PROBLEMA Nº 174

En el gráfico, $(AB)(BC) = 12\sqrt{2}$, calcule x.

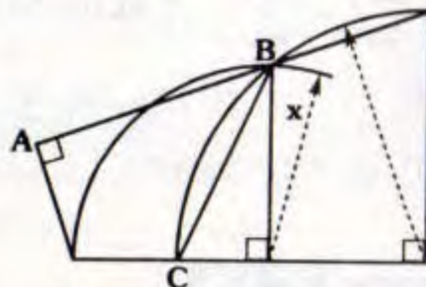
A) $2\sqrt{3}$

C) $4\sqrt{3}$

C) $2\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2}$

E) $3\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 175

En el gráfico, B es punto de tangencia, $AC = 6\sqrt{2}$ y AF=8, calcule ED.

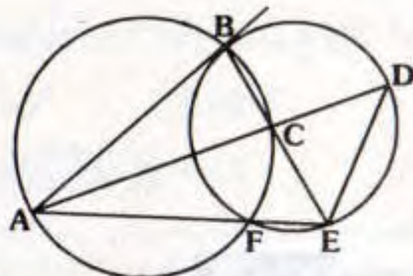
A) 2

B) 3

C) $3\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $2\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 176

En el gráfico, PQTB es cuadrado y OP=10, calcule AQ.

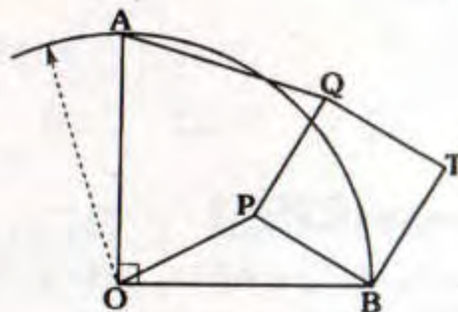
A) 10

B) 28,14

C) 14,14

D) 17,3

E) 20



PROBLEMA Nº 177

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, las prolongaciones de $\overline{QP}$ y $\overline{DC}$ se cortan en M.

Si: $m\measuredangle BAD + m\measuredangle ADC = 140°$ y $\frac{AB}{CD} = \frac{BP}{PC} = \frac{AQ}{QD}$. Calcule $m\measuredangle QMD$.

A) 10° B) 20° C) 40°

D) 25° E) 50°

PROBLEMA Nº 178

Se tiene un triángulo ABC (AB=BC) y un cuadrado PQRT inscrito en el ($\overline{PT}$ está contenido en $\overline{AC}$). La prolongación de $\overline{AR}$ intersecta a la bisectriz exterior que parte de "B" en "S". Si $\overline{BH} \perp \overline{AC}$; BH=4, calcular BS.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 179

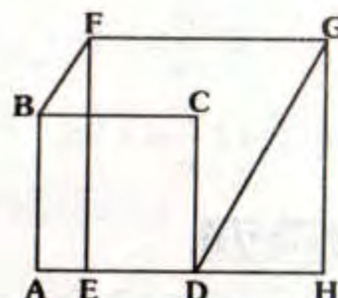
Dado un triángulo ABC (AB=AC), la circunferencia inscrita es tangente al lado AB en P. Por P se traza $\overline{PM} \perp \overline{AC}$ (M en $\overline{AC}$). Si la altura CH mide 10, calcule PM.

A) 10 B) $5\sqrt{2}$ C) 5

D) 4 E) 2,5

PROBLEMA Nº 180

Calcular "AE", si AB=a, GH=b, $\overline{BF} // \overline{DG}$ y ABCD, EFGH son cuadrados.



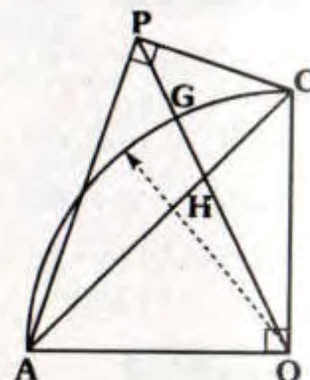
A) $\frac{(b-a)^2}{a}$ B) $\frac{(b-a)^2}{2b}$

C) $\frac{a(b-a)^2}{(a+b)^2}$ D) $\frac{(a+b)^2}{2a}$

E) $\frac{(a+b)^3}{2ab}$

PROBLEMA Nº 181

Del gráfico, calcule OA, si OP=34 y 13(PG)=17(GH).



A) 18

B) 26

C) $15\sqrt{2}$

D) $10\sqrt{3}$

E) $5\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 182

En un triángulo ABC recto en B de incentro I; $\overline{BP}$ es bisectriz interior. Si BI=4, IP=3, calcular AC.

A) $5\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{3}$ C) 10

D) $12\sqrt{2}$ E) 7

PROBLEMA Nº 183

Calcular AF, si FE=4m, BE=6m y AD=DC.

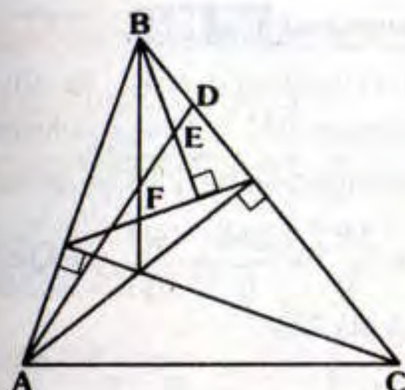
A) 9 m

B) $\sqrt{24}$ m

C) 12 m

D) 5 m

E) 10 m



PROBLEMA Nº 184

Se tiene un triángulo ABC cuyos lados miden: AB=c, BC=a y AC=b, se traza una recta tangente a la circunferencia inscrita y paralela al lado AB, que intersecta a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en "E" y "F" respectivamente. Por la intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{FB}$ se traza una paralela a $\overline{AB}$ que intersecta a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en "M" y "N" respectivamente. Calcular MN.

A) $\dfrac{c(a+b-c)}{a+c}$ B) $\dfrac{c(a+b-c)}{a+b}$

C) $\dfrac{c(a+c-b)}{a+b}$ D) $\dfrac{c(a+b-c)}{b+c}$

E) $\dfrac{c(a+b-c)}{b-c}$

PROBLEMA Nº 185

En la figura, H es ortocentro del triángulo ABC. Calcule "x", si AC=2(EP).

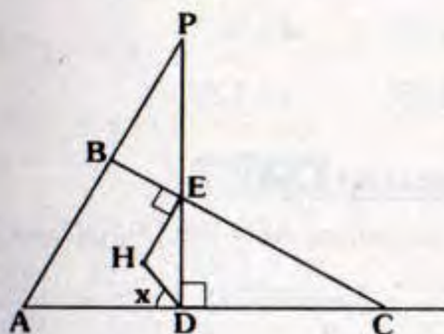
A) 45°

B) 53°/2

C) 30°

D) 127°/2

E) 60°



PROBLEMA Nº 186

En un triángulo ABC de incentro "I"; m∢A = 73°; m∢C = 39°. Calcular IB, si AB=c, BC=a, AC=b.

A) $\dfrac{(a+c)b}{a+b+c}$ B) $\dfrac{c(a+c)}{a+b+c}$ C) $\dfrac{bc}{a+c}$

D) $\dfrac{b(b+c)}{a+b+c}$ E) $\dfrac{(a+b)c}{a+c-b}$

PROBLEMA Nº 187

Según el gráfico, AM=a y CH=b. Calcule CM.

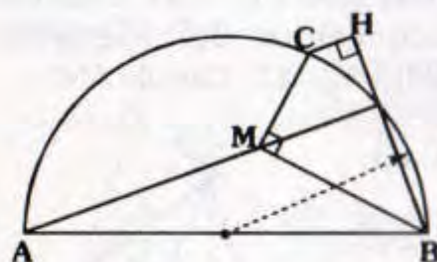
A) a+b

B) $\sqrt{ab}$

C) $\sqrt{2ab}$

D) $2\sqrt{ab}$

E) $\sqrt{a^2+b^2}$



PROBLEMA Nº 188

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. Si AM=3(MN)=6. Calcule NP.

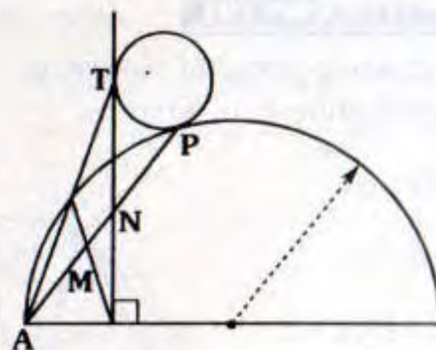
A) 1

B) 2

C) 3

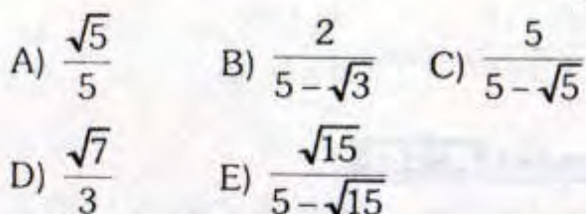
D) 4

E) 5



PROBLEMA Nº 189

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si TC=4(TB), calcule PT/TA.



A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{2}{5-\sqrt{3}}$ C) $\frac{5}{5-\sqrt{5}}$

D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{5-\sqrt{15}}$

PROBLEMA Nº 190

En el gráfico, H es ortocentro y O es circuncentro del triángulo ABC. Si (BM)(FM)=12. Calcule AM.

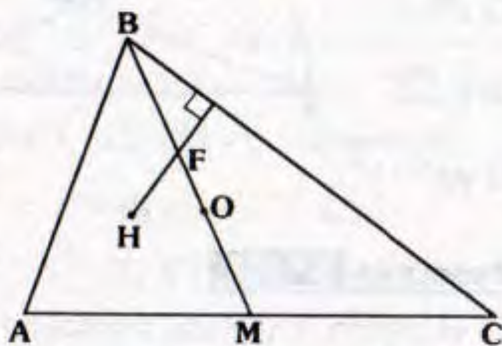
A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$

E) $3\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 191

A y C son puntos de tangencia. Indique la relación entre a, b, c y d.

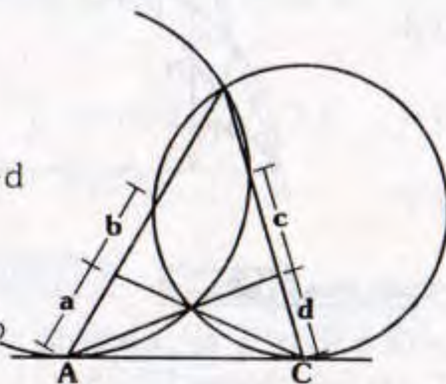
A) ab=cd

B) ad=bc

C) a+b=c+d

D) ac=bd

E) $a^2c=d^2b$



PROBLEMA Nº 192

En el triángulo ABC, la altura BH y las cevianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ concurren en P, en la prolongación de $\overline{HM}$ se ubica Q de modo que $\frac{HQ}{9}=\frac{BH}{6}=\frac{NH}{4}$ y BQ=27.

Calcule NB.

A) 10 B) 12 C) 16

D) 18 E) 20

PROBLEMA Nº 193

Se tiene el triángulo ABC de incentro I, una recta pasa por I y corta a $\overline{AB}$ en P, a $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AC}$ en D. Si AB=7, BC=5, CD=4 y AC=6.

Calcule $\frac{AP}{PB}+\frac{QC}{BQ}$

A) 2 B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{7}{13}$

D) 1 E) $\frac{14}{13}$

PROBLEMA Nº 194

Se tiene el rectángulo ABCD, N y M son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Se ubica E en $\overline{ND}$ y P en la prolongación de $\overline{NA}$. Si $m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle ECD$.

Calcule $m\sphericalangle PMA + m\sphericalangle AME$.

A) 180° B) 90° C) 150°

D) 135° E) 120°

PROBLEMA Nº 195

En el gráfico, AB=2(CD), BN=a, NP=b y $m\overset{\frown}{CD} = 2(m\sphericalangle MRN)$. Calcule $\frac{MB}{PQ}$.

A) $\dfrac{2a}{a+b}$ B) $\dfrac{a}{a+b}$ C) $\dfrac{b}{a+b}$

D) $\dfrac{a}{b}$ E) $\dfrac{3a}{a+b}$

PROBLEMA Nº 196

En el gráfico, P, B y Q son puntos de tangencia. Calcule $\dfrac{(BN)(AM)}{(NC)(MB)}$

A) 1

B) 2

C) 1/5

D) 3

E) 2/3

PROBLEMA Nº 197

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si AB=BE=2(HB). Calcule CF/FB

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 8

PROBLEMA Nº 198

Se tiene el triángulo ABC de incentro I, una recta que pasa por I corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N. Si MB=NB, AM=4 y NC=6. Calcule MN.

A) $2\sqrt{6}$ B) $12\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $4\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 199

En el gráfico, E y D son puntos de tangencia. Si AB=4(BC)=12. Calcule CD.

A) 3,2

B) 2,8

D) 4

D) 4,5

E) 5

PROBLEMA Nº 200

En el gráfico, calcule R, si el cuadrilátero ABCD es bicéntrico.

A) $a+b$ B) $\sqrt{ab}$ C) $2\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{2ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 201

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se ubica P en $\overline{AB}$, tal que $AP = \sqrt{2}(PB)$ y Q en $\overline{PC}$ con PB=BQ. Si $m\sphericalangle ACB = 40°$, calcule $m\sphericalangle AQP$.

A) 40° B) 50° C) 60°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 202

Se tiene el triángulo ABC, BV, CW y AU son cevianas interiores concurrentes, X es un punto en $\overline{UC}$ tal que WAVX es paralelogramo. Si $\dfrac{BU}{UC} = k$. Calcule $\dfrac{BX}{XC}$.

A) k B) $\dfrac{1}{k}$ C) 2k

D) $\dfrac{k}{2}$ E) $\sqrt{k}$

PROBLEMA Nº 203

Se tiene un triángulo ABC de incentro I y circuncentro O, tal que $m\sphericalangle ABC = \alpha$, la recta de Euler del triángulo AIC corta a $\overline{OI}$ en M, calcule IM/MO en función de α.

A) $\text{sen}\alpha$ B) $2\text{sen}\alpha$

C) $4\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$ D) $2\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$

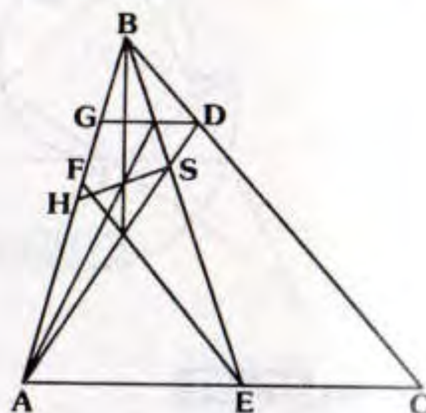
E) $\dfrac{1}{4}\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$

PROBLEMA Nº 204

Se tiene el triángulo ABC, se ubican en las regiones exteriores relativa a los lados AB y BC los puntos P y Q respectivamente y M en la región interior, si los triángulos ABP, BQC y AMC son semejantes e isósceles de bases AB, BC y AC respectivamente. Demostrar que MPBQ es un paralelogramo.

PROBLEMA Nº 205

En el gráfico, $\overline{GD} // \overline{AC}$, $\overline{FE} // \overline{BC}$. Calcule $\dfrac{BH}{AH}$.



A) 1

B) 2

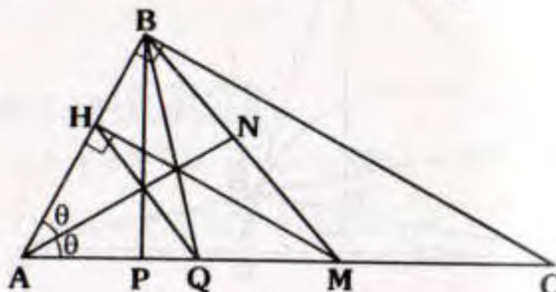
C) 3

D) 2/3

E) 4/3

PROBLEMA Nº 206

En el gráfico, AB=MC. Halle $\dfrac{AP}{PQ}$.



A) 2 B) 1 C) 3

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

PROBLEMA Nº 207

En el triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, se traza la altura BM, la proyección de O sobre $\overline{HM}$ es N, T es punto medio de BC, $\overleftrightarrow{TN} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{K\}$. Si HM=2(HN) y BK=6(KA)=12. Calcule NK.

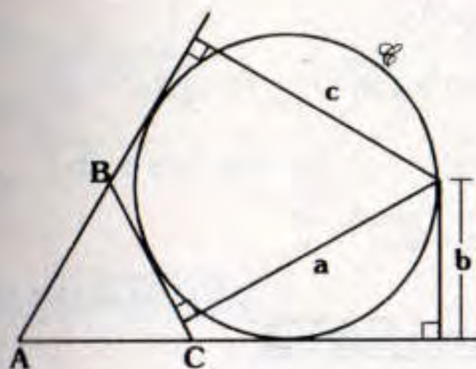
A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) 3

D) $4\sqrt{6}$ E) 5

PROBLEMA Nº 208

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ del triángulo equilátero ABC.

Calcule $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

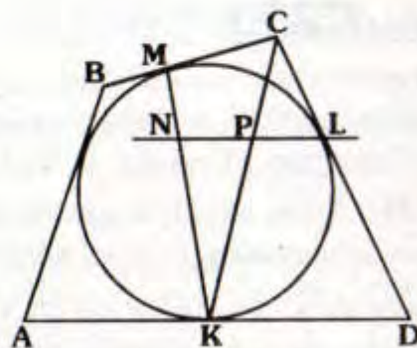


A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) 3 E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 209

En el gráfico, se muestra el cuadrilátero circunscrito ABCD, si las rectas AD y NL son paralelas. Demuestre: NP=PL.



PROBLEMA Nº 210

En el triángulo ABC, con $m\measuredangle ABC = 60°$, se ubica el punto de Fermat F, tal que AF=a y FC=b. Halle BF.

A) a+b B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $2\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{2ab}$

PROBLEMA Nº 211

Sea I un punto coplanar con el triángulo ABC las bisectrices de los ángulos BIC, CIA y AIB cortan a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ en A', B' y C'. Es cierto que:

A) $\overline{A'B'} // \overline{AB}$

B) AA'=BB'=CC'

C) $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren.

D) $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son bisectrices.

E) por lo menos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ ó $\overline{CC'}$ es mediana.

PROBLEMA Nº 212

Se tiene el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B) circunscrito. Si $m\measuredangle DBC = \alpha$ y $m\measuredangle BCA = \beta$. Calcule $tg\alpha + tg\beta$.

A) 1 B) 1/2 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 213

Se traza la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero ABC, se traza una recta tangente a dicha circunferencia, la cual corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N; E y F son las proyecciones ortogonales de A y C sobre la recta MN; $\overline{EC}$ y $\overline{AF}$ se cortan en H; y $\overline{AN}$ y $\overline{MC}$ se cortan en G, la prolongación de $\overline{HG}$ corta a $\overline{MN}$ en S. Demostrar que HG=GS.

PROBLEMA Nº 214

Se tiene el trapecio ABEC ($\overline{AC}//\overline{BE}$), se ubica P en $\overline{AB}$, si AB=BC, $\overline{AE}$ biseca a $\overline{CP}$ y $m\sphericalangle BPC=\alpha$. Calcule $m\sphericalangle BCE$.

A) α B) 2α
C) $90°-\alpha$ D) $90°+\alpha$
E) $180°-\alpha$

PROBLEMA Nº 215

En el triángulo ABC, AB=c, BC=a y AC=b. Si $3(m\sphericalangle BAC)+2(m\sphericalangle ACB)=180°$, indique la relación entre a, b y c.

A) $a^2=b^2-bc$ B) $a^2=c^2-bc$
C) $c^2=a^2-ab$ D) $c^2=b^2-ab$
E) $b^2=a^2-bc$

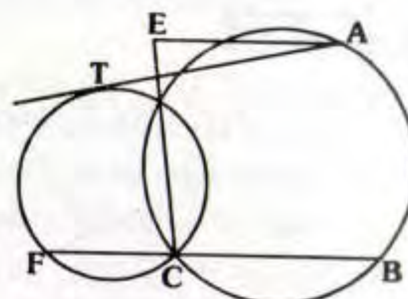
PROBLEMA Nº 216

En el rectángulo ABCD, se traza $\overline{BP}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (P en $\overline{AC}$), M y N son puntos medios de $\overline{PC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Calcule $m\sphericalangle BMN$.

A) 60° B) 120° C) 90°
D) 135° E) 45°

PROBLEMA Nº 217

En el gráfico, T es punto de tangencia y $\overline{AE}//\overline{BC}$ si AE=3 y BF=4. Calcule AT.



A) 5 B) 7 C) $\sqrt{15}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

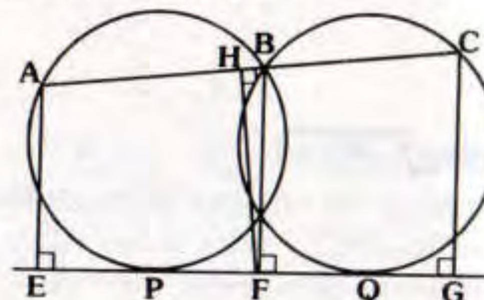
PROBLEMA Nº 218

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH, en los triángulos AHB, BHC, APM y CQH se trazan las alturas HP, HQ, PM y QN respectivamente. Si AM=a y NC=c, calcule AC.

A) $a+b+\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$
C) $4\sqrt{ab}$ D) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$
E) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3$

PROBLEMA Nº 219

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AE=a; BF=b y CG=c, calcule HF en función de a, b y c.



A) $\sqrt[3]{abc}$ B) $\dfrac{ac}{b}$ C) $\dfrac{a^2+c^2}{2b}$

D) $\dfrac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}$ E) $\sqrt{\dfrac{b(a+c)}{2}}$

PROBLEMA Nº 220

En la prolongación del lado BC del cuadrado ABCD y en $\overline{AB}$ se ubican los puntos P y M respectivamente, tal que $\overline{MP} \cap \overline{CD} = \{L\}$, $m\measuredangle PMD = 45°$, CL=1 y LD=5.

Calcule el menor valor de BM.

A) 3 B) 2 C) 4

D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, AM=MB y DN=NE, calcule x.

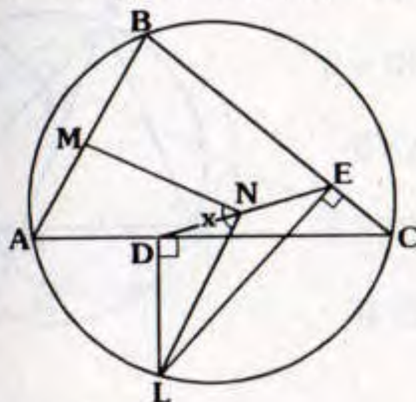
A) 120°

B) 135°

C) 106°

D) 108°

E) 90°



PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, T es punto de tangencia, si AT=a, AB=b, CB=c y CD=d. Indique la relación entre a, b, c y d.

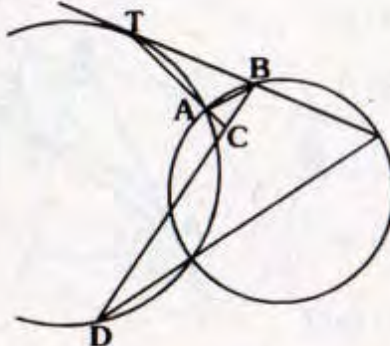
A) ac=bd

B) ab=cd

C) $ca^2 = db^2$

D) $c^2a = d^2b$

E) (a+b)d=ca



PROBLEMA Nº 223

Desde el punto P exterior a la circunferenica de radio R se trazan las tangentes $\overline{PB}$ y $\overline{PD}$ (B y D son puntos de tangencia), luego se traza la secante PCA, la proyección de B y D sobre CA son los puntos H y T respectivamente. Si $(AB)(CD)=\sqrt{K}$ y (BH)(TD)=K, calcule R.

A) 1 B) 2 C) 0,5

D) 0,25 E) $\dfrac{\sqrt{K}}{K}$

PROBLEMA Nº 224

En el gráfico, AO=OB, calcule x.

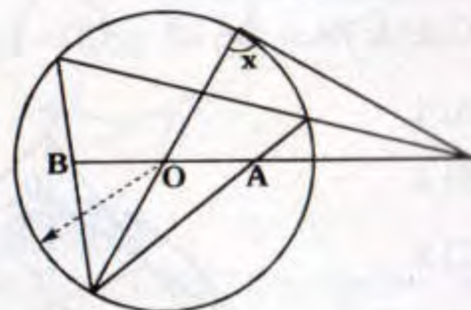
A) 120°

B) 90°

C) 105°

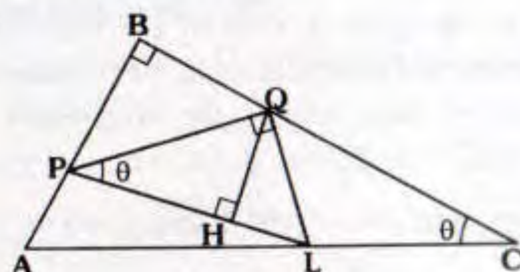
D) 108°

E) 106°



PROBLEMA Nº 225

Si 2(AL)=3(LC), PB=2(AP) y PL=13.
Calcule QH.

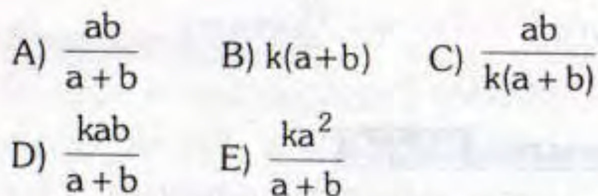


A) $7\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $10\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{10}$ E) $\sqrt{30}$

PROBLEMA Nº 226

En el gráfico, AE=a, CF=b y $\frac{PQ}{AC}=k$. Calcule BH.



A) $\frac{ab}{a+b}$ B) k(a+b) C) $\frac{ab}{k(a+b)}$

D) $\frac{kab}{a+b}$ E) $\frac{ka^2}{a+b}$

PROBLEMA Nº 227

Calcule PA si DE=2 y CD=1.

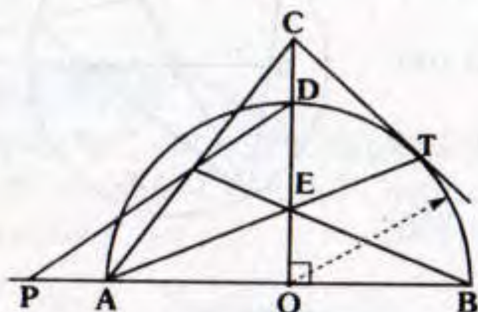
A) 1

B) 4

C) 2

D) $3\sqrt{2}$

E) 3



PROBLEMA Nº 228

En el triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AC}$ en D. Calcule la distancia de D hacia la recta que contiene a los otros dos puntos de tangencia, si m∢ABC = α, AD=a y DC=b.

A) $\sqrt{ab}.\text{sen}\alpha$ B) $2\sqrt{ab}.\cos\alpha$

C) $\frac{2ab.\cos\alpha}{a+b}$ D) $\frac{2ab.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a+b}$

E) $(a+b).\text{sen}\alpha$

PROBLEMA Nº 229

Calcule x, si BM=MN y ABCD es un cua-
drado.

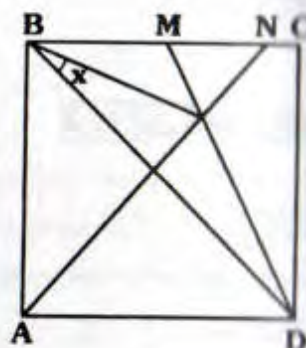
A) 8°

B) 22°30'

C) 26°30'

D) 15°

E) 18°30'



PROBLEMA Nº 230

En la figura mostrada, MC.HL=54; BL=12 y BF=FC. Calcule BM.

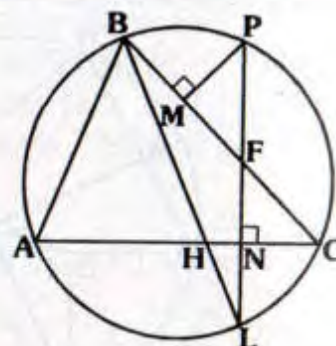
A) 4

B) 4,5

C) 5

D) 5,5

E) 6



PROBLEMA Nº 231

En el gráfico, A y D son puntos de tangen-
cia. Calcule el valor de R, si FD=3(EC)=3.

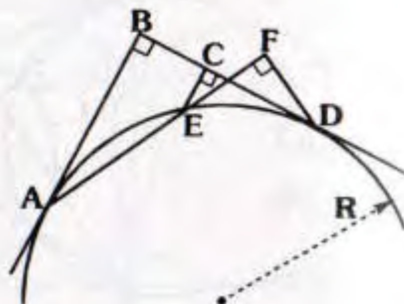
A) 6

B) 8

C) $2\sqrt{6}$

D) 9

E) $6\sqrt{2}$



PROBLEMA Nº 232

En la figura, "P" y "T" son puntos de tangencia, AM=4, AN=5 y BK=10. Si 3(BH) = 5(BS) − 3(AH), calcule SL.

A) 6,3

B) 7,2

C) 8,4

D) 9,8

E) 7,4

PROBLEMA Nº 233

Del gráfico, calcule CD, si AB=6, BC=4 y AD//EF.

A) 10

B) $2\sqrt{6}$

C) 7

D) 8

E) 9

PROBLEMA Nº 234

Del gráfico, calcule BF, si (AE)(CG)=15 y (AB)(BC)−(EF)(FG)=3.

A) 3

B) 4

C) 6

D) $2\sqrt{3}$

E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 235

Dado el triángulo rectángulo ABC (recto en B). En los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos D, E y F respectivamente. Si AF=3(FC), AD=2(DB), m∢FEC=m∢DEB y EC=12. Calcule EB.

A) 6 B) 4 C) 5 D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule AB/MN.

A) 2

B) 3

C) $\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$

E) 3

PROBLEMA Nº 237

Se tiene el rombo ABCD de centro O, m∢BAD = 60°, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ tal que m∢PAQ = 30°. Calcule m∢POQ.

A) 60° B) 90° C) 120°

D) 135° E) 106°

PROBLEMA Nº 238

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule x.

A) 60°

B) 120°

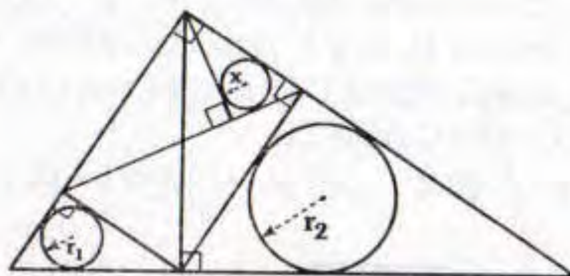
C) 90°

D) 75°

E) 74°

PROBLEMA Nº 239

Calcule x, en:



A) $r_1\sqrt{\dfrac{r_2}{r_1+r_2}}$ B) $r_2\sqrt{\dfrac{r_1}{r_1+r_2}}$

C) $\dfrac{r_1^2}{r_1+r_2}$ D) $\dfrac{r_2^2}{r_1+r_2}$

E) $\dfrac{r_1^2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$

PROBLEMA Nº 240

En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H, se trazan $\overline{HM}//\overline{BA}$ y $\overline{HN}//\overline{BC}$, tal que M y N está en $\overline{AC}$, si AM+NC=2(MN) y m∢BCA = 40°.

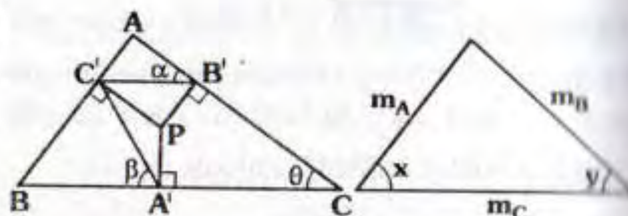
Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{BC}$ y la recta de Euler del triángulo ABC.

A) 20° B) 60° C) 40°
D) 80° E) 50°

PROBLEMA Nº 241

En el gráfico, m_A, m_B y m_C son las longitudes de las medianas del ΔABC, trazadas desde A, B y C respectivamente.

Si $\dfrac{PA'}{BC}=\dfrac{PB'}{AC}=\dfrac{PC'}{AB}$, calcule x+y.



A) α+β+θ B) α+β−θ

C) 180°+θ−α−β D) 90°+θ−α−β

E) 180°−α−β−θ

PROBLEMA Nº 242

En el gráfico, calcule θ−α.

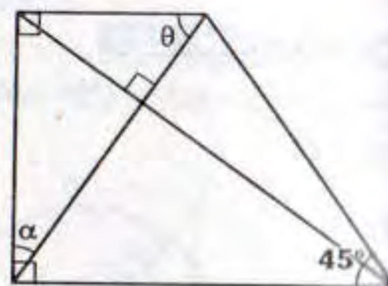
A) 45°

B) 37°

C) 22,5°

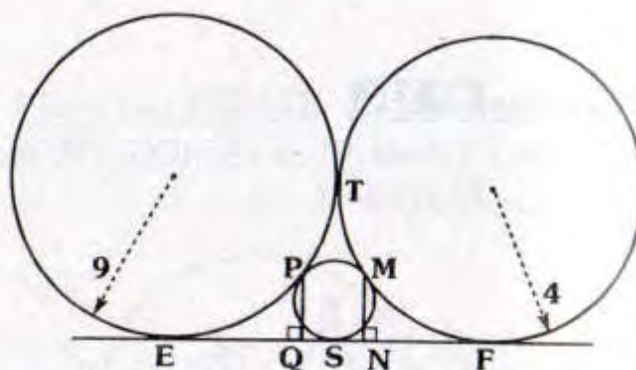
D) 18,5°

E) 26,5°



PROBLEMA Nº 243

En el gráfico, calcule PQ/MN. (E, T, F, M, P y S son puntos de tangencia)



A) $\dfrac{36}{31}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1

D) $\dfrac{5}{4}$ E) $\dfrac{34}{29}$

PROBLEMA Nº 244

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la ceviana interior CQ y la mediana $\overline{AL}$ del triángulo AQC.

Si $m\measuredangle QAL = m\measuredangle ACL = 2x$ y $m\measuredangle QCB = x$. Calcule x.

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 22,50°

PROBLEMA Nº 245

En el gráfico, AL=1 y LD=3. Calcule $\dfrac{PD}{PB}$.

A) 6/5

B) 9/5

C) 12/5

D) 5/3

E) 5

PROBLEMA Nº 246

Sea el triángulo ABC, AB=c, BC=a y AC=b, se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$ tal que $\overline{PQ} // \overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia inscrita. Si PQ=x, indique el menor valor de: "a+b+c"

A) 6x B) 4x C) 8x

D) $4x\sqrt{2}$ E) $8x\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 247

Se tiene el cuadrilátero inscrito ABCD en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos M y N respectivamente tal que $\dfrac{AM}{NC} = \dfrac{MB}{DN} = 2$. Si las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se cortan en P y la bisectriz del ángulo APB corta a $\overline{MN}$ en Q. Calcule $\dfrac{MQ}{NQ}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1

D) $\dfrac{1}{2}$ E) 2

PROBLEMA Nº 248

Se tiene el cuadrado ABCD, Q está en $\overline{AB}$ y R en $\overline{AD}$ tal que el triángulo CQR es equilátero, se traza el triángulo equilátero RQC, con $\overline{AP} \cap \overline{QR} = \{M\}$ y $\overline{PD} \cap \overline{RC} = \{N\}$. Calcule la razón de inradios de los triángulos AMR y RND.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}+1$ E) $\sqrt{3}-1$

PROBLEMA Nº 249

En el gráfico, S es punto simediano del triángulo ABC. Calcule senx.

A) 1/2

B) 1/3

C) 2/3

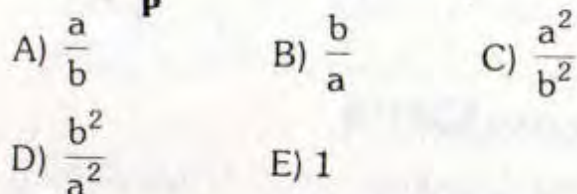
D) 3/4

E) 3/5

PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, ABCD es un rectángulo $\overline{PC} \cap \overline{AQ} = \{X\}$ y $\overleftrightarrow{BX} \cap \overleftrightarrow{PQ} = \{S\}$.

Si AB=a y AP=b. Calcule PS/SQ.

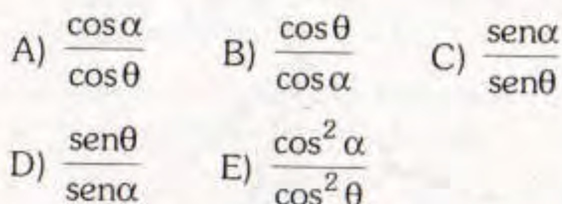


A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a^2}{b^2}$

D) $\frac{b^2}{a^2}$ E) 1

PROBLEMA Nº 251

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita. Calcule $\frac{EL}{LF}$ en función de α y θ.



A) $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ B) $\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$ C) $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}$

D) $\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha}$ E) $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}$

PROBLEMA Nº 252

Se tiene el cuadrado ABCD, M es punto medio de $\overline{AB}$, P está en $\overline{BC}$, Q en $\overline{CD}$ y O es centro del cuadrado. Si $m\measuredangle MPB = \alpha$ y $m\measuredangle POQ = 45°$, calcule $m\measuredangle AQD$.

A) $45° + \alpha$ B) $45° + 2\alpha$ C) 2α

D) $90° - \alpha$ E) α

PROBLEMA Nº 253

Se tiene el triángulo ABC de circuncentro O y E es el excentro relativo a $\overline{BC}$, la recta de Euler del ΔBEC corta a $\overline{OE}$ en S. Si $m\measuredangle BAC = \alpha$, calcule OS/SE.

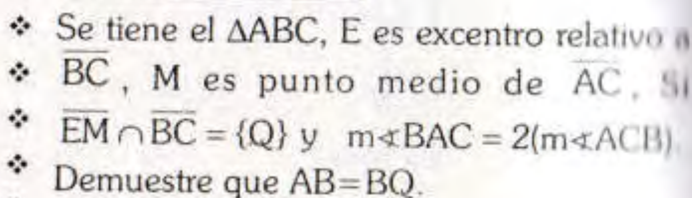
A) $\frac{1}{4}\csc^2\frac{\alpha}{2}$ B) $\frac{1}{4}\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

C) $\frac{1}{4}\csc^2\alpha$ D) $\frac{1}{4}\text{sen}^2\alpha$

E) $\frac{\text{sen}\alpha}{4}$

PROBLEMA Nº 254

Si $\overline{AD} // \overline{BC}$, demuestre: x=y.



PROBLEMA Nº 255

Se tiene el ΔABC, E es excentro relativo a $\overline{BC}$, M es punto medio de $\overline{AC}$, Si $\overline{EM} \cap \overline{BC} = \{Q\}$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB)$. Demuestre que AB=BQ.

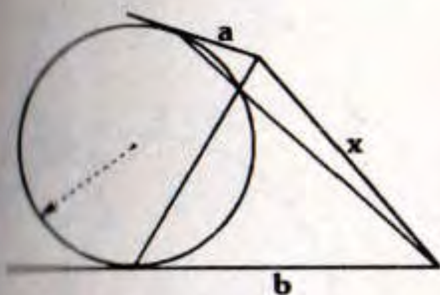
PROBLEMA Nº 256

Sea el triángulo ABC de baricentro G, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ABP y BCQ de centros N y M. Calcule $m\measuredangle MGN$.

A) 60° B) 90°
C) 150° D) 105°
E) 120°

PROBLEMA Nº 257

Si A y B son puntos de tangencia, calcule x.



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\sqrt{ab}$

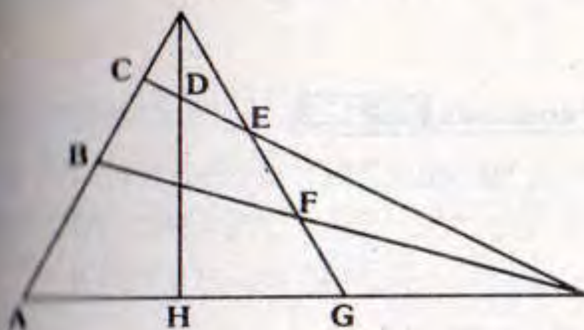
C) $\sqrt{a^2+ba+b^2}$ D) $\sqrt{a^2-ba+b^2}$

E) $\sqrt{2ab}$

PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, halle:

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FG}\cdot\frac{GH}{HA}$$

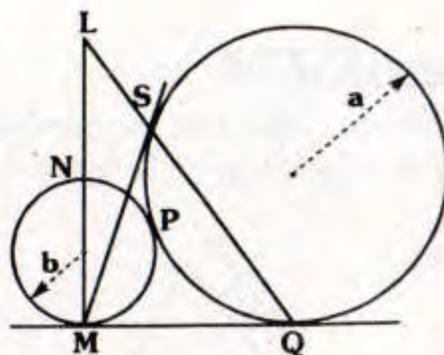


A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) F.D.

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, M, S, P y Q son puntos de tangencia. Calcule $\frac{MN}{NL}$.



A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{2a}{b}$ C) $\frac{a^2}{b^2}$

D) $\frac{b^2}{a^2}$ E) 1

PROBLEMA Nº 260

Se tiene el triángulo ABC (escaleno) se trazan las bisectrices interiores $\overline{CC_1}$ y $\overline{BB_1}$, luego las exteriores $\overline{CC_2}$ y $\overline{BB_2}$.

Con diámetros $\overline{C_1C_2}$ y $\overline{B_1B_2}$ se trazan semicircunferencias secantes en P.

P se proyecta sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. ¿Qué tipo de triángulo es el que tiene como vértices dichas proyecciones?

A) Semejante al ΔABC.

B) Triángulo rectángulo.

C) Triángulo isósceles.

D) Sus ángulos internos son $90°-\frac{A}{2}$, $90°-\frac{B}{2}$

E) Equilátero

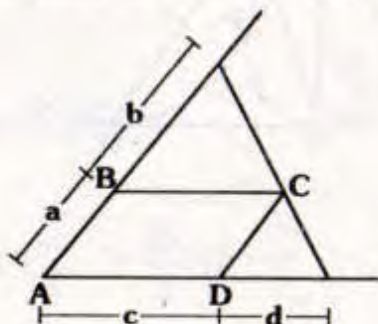


Problemas Resueltos

Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo indique la relación entre a, b, c y d.



A) ad=bc B) (a+b)d=(c+d)a

C) a(a+b)=c(c+d) D) d(a+d)=b(c+b)

E) ac=bd

PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, AF=4 y EC=6. Calcule BD.

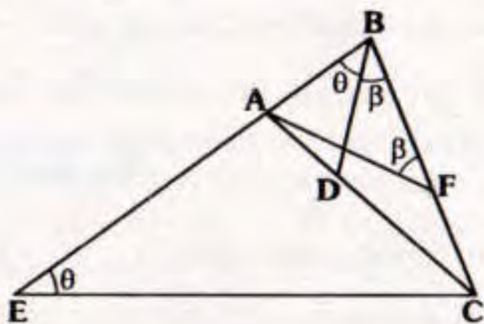
A) 1

B) 2

C) 2,4

D) 3

E) 4,8



PROBLEMA Nº 263

En el gráfico, 2(AN)=3(AM) y CD=6. Calcule CF.

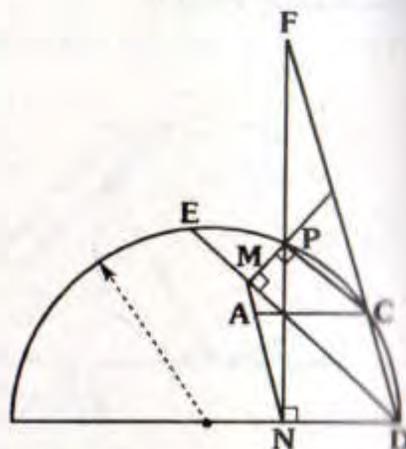
A) 8

B) 6

C) 9

D) 12

E) 10



PROBLEMA Nº 264

Se tiene el cuadrado ABCD, N es punto medio de $\overline{AD}$, L está en $\overline{AB}$ tal que $m\sphericalangle CNL = 90°$, $\overline{NC} \cap \overline{BD} = \{S\}$, la prolongación de $\overline{LS}$ corta a $\overline{CD}$ en M.

Calcule $\frac{CM}{MD}$.

A) 1 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{5}$

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo ABC, se ubica P en $\overline{AC}$ y Q en $\overline{AB}$, tal que AQ=PC, AP=BC, $m\sphericalangle QPB = m\sphericalangle PCB$, PQ=3 y PB=4.

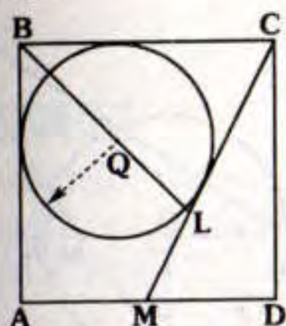
Calcule BC/PC.

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{2}$ E) 3

PROBLEMA Nº 266

Si ABCD es un cuadrado y AM= MD. Calcule BQ/QL.

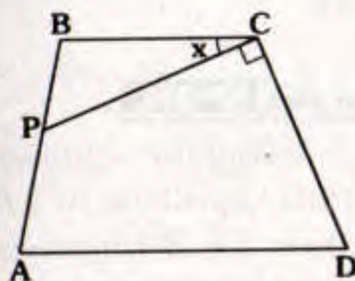


A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

PROBLEMA Nº 267

En el gráfico, $\overline{BC} // \overline{AD}$, PC=CD y BP=3(PA). Calcule x.



A) 8°

B) 37°

C) 16°

D) 22,5°

E) 18,5°

PROBLEMA Nº 268

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD, M es punto medio de $\overline{AB}$, I es incentro del triángulo ABC. Si m∢ACB = 2(m∢MDB). Calcule BI/ID.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2

D) $\frac{2}{3}$ E) 3

PROBLEMA Nº 269

Si AB=BC, AP=5(PQ)=5, MN=2(MQ) y 2(QC)=3(LC). Calcule AS.

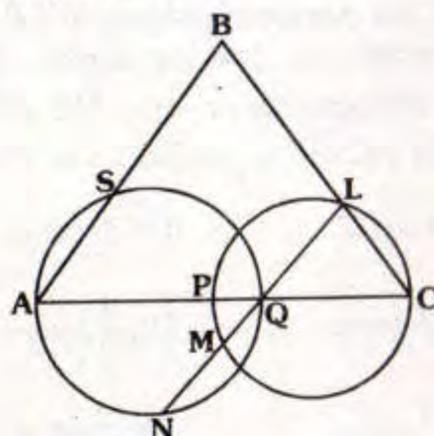
A) 3

B) 4

C) 9/2

D) 11/2

E) 5/2



PROBLEMA Nº 270

En el rectángulo ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si $AM = 2\sqrt{2}$ y $BN = \sqrt{17}$. Si P es la intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, el valor de PM+PN es:

A) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{17}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{17}}{5}$

C) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{17}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$

E) $\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$

PROBLEMA Nº 271

En el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y D) sus diagonales se intersecan perpendicularmente en E. Si AD=3 y AE=1. Determinar la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{DC}$.

A) $21\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $21\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 9

D) 10 E) $11\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 272

En el triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas AP y CM, luego se trazan los paralelogramos APFB y CMEB, la recta que une los centros de dichos paralelogramo corta a $\overline{ME}$ y $\overline{PF}$ en R y S. Si $AC=\ell$ y $m\measuredangle ABC=\alpha$. Calcule RS.

A) $\ell\cos\alpha$ B) $3\ell\cos\alpha$

C) $3\ell\text{sen}\alpha$ D) $\frac{3}{2}\ell\cos\alpha$

E) $\frac{3}{2}\ell\text{sen}\alpha$

PROBLEMA Nº 273

En el triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ de los triángulos ABC, ADB y BDC respectivamente. Si $FC=\frac{1}{5}BC$, BF=12 y AE=5. Calcule AB.

A) 6 B) 11

C) 15 D) 18

E) 20

PROBLEMA Nº 274

En un triángulo ABC recto en B, las bisectrices interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ se intersecan en I. Si (BP)(BQ)=8, calcule BI.

A) 2 B) 8

C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$

E) 4

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico, MN=1 y OM=2, calcule AB

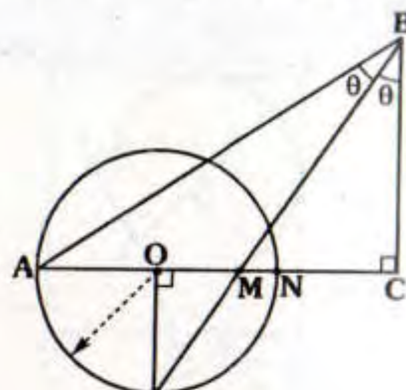
A) 5

B) 6

C) 7,5

D) 9

E) 12



PROBLEMA Nº 276

En el cuadrado ABCD, P y Q son puntos en los lados AB y AD respectivamente; de modo que $\overline{BQ}\cap\overline{PC}=\{E\}$, $m\measuredangle PCQ=45°$, PQ=4(BP) y BE=4. Calcule BQ.

A) 12 B) 16 C) 20

D) $8\sqrt{2}$ E) 32

PROBLEMA Nº 277

En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro O, y alturas AT y BM, la paralela trazada por T a $\overline{BM}$ intercepta a la prolongación de $\overline{AB}$ en P. Calcule la distancia de T a $\overline{BM}$, si AC=12, OM= 3 y PT=8.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 278

En un triángulo ABC de circuncentro "O" la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$, a la circunferencia ciscunscrita al triángulo ABC y a la prolongación de $\overline{AB}$ en los puntos M, N y T respectivamente. Calcule el

circunradio del triángulo ABC, si OM=8 y MT=10.

A) 8 B) 9 C) 12
D) 15 E) 18

PROBLEMA Nº 279

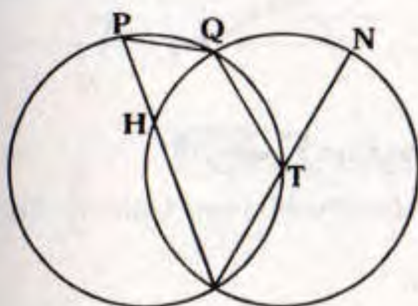
Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, luego se traza una circunferencia tangente al arco AB en "T" y a la prolongación de $\overline{AB}$ en "P", si: AT=12 y AB=13, calcule BP.

A) $\frac{65}{7}$ B) $\frac{67}{4}$ C) 6
D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{63}{8}$

PROBLEMA Nº 280

Calcule QT, si PQ=3 y NT=2(HP).

A) 6
B) 3
C) 4
D) 5
E) 4,5



PROBLEMA Nº 281

Se tiene un triángulo equilátero ABC de baricentro "G"; en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ se ubica el punto "P" tal que la recta PG interseca a $\overline{BC}$ en "Q". Si 3(BQ)=5(QC), $m\measuredangle APG=30°$ y $PG=7\sqrt{3}$, calcule AP.

A) 6 B) 10 C) 12
D) 14 E) 21

PROBLEMA Nº 282

Se tiene un triángulo ABC de baricentro "G" y un paralelogramo AGDC; "M" es punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{MD}$ intersecan a $\overline{BC}$ en E y F respectivamente. Calcule $\frac{AE}{ED}-\frac{MF}{FD}$.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

PROBLEMA Nº 283

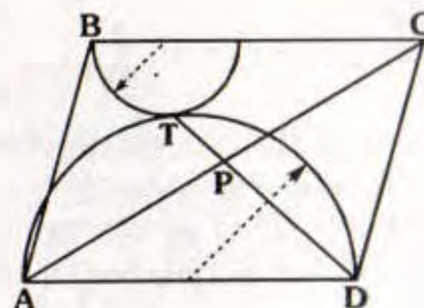
En un triángulo ABC, recto en A, se traza la ceviana interior AP, en cuya prolongación se ubica el punto D tal que $\overline{BC}\perp\overline{CD}$. Si AB=BP=3 y PC=4, calcule (AP)(PD)

A) 8 B) 10 C) 24
D) 12 E) 16

PROBLEMA Nº 284

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, la razón de los radios de la semicircunferencia es 3/7. Calcule TP/PD. ("T" es punto de tangencia)

A) 1/7
B) 2/5
C) 2/7
D) 1/6
E) 3/8



PROBLEMA Nº 285

Si P, Q y T son puntos de tangencia; AM=1 y BH=3; calcule TN.

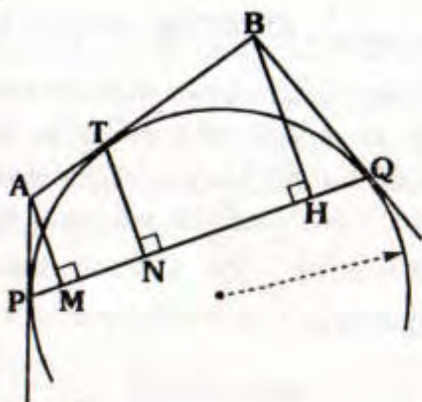
A) 1,5

B) 1,8

C) 1,6

D) 2,2

E) 1,2



PROBLEMA Nº 286

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo y CD=3(PB). Calcule BQ/QO.

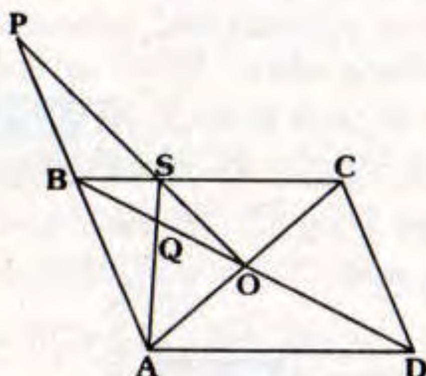
A) 1/2

B) 1/3

C) 1/4

D) 1/5

E) 1/6



PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, ABCD es un rombo, AC=10, BD=2 y AB=PC=CQ. Calcule la distancia entre los baricentros de los triángulos BCP y DCQ.

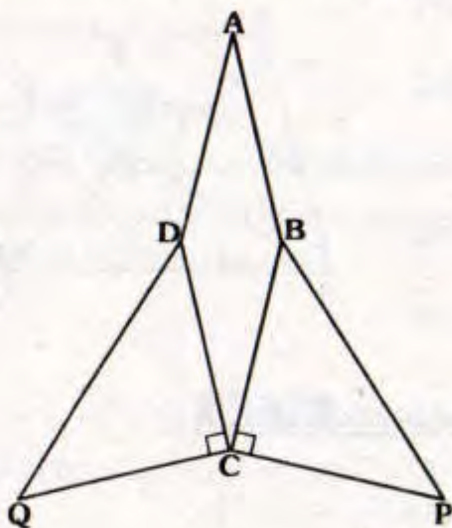
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 8



PROBLEMA Nº 288

Se tiene el cuadrante AOB de centro O; en $\overset{\frown}{AB}$ y en la prolongación de $\overline{OB}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente; tal que la circunferencia de centro O_1 que contiene a P, B y Q interseca a $\overleftrightarrow{AP}$ en L. Si $OO_1=a$, calcule AL.

A) a B) 2a C) $a\sqrt{2}$

D) $a\sqrt{3}$ E) $a\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº 289

G es baricentro del triángulo THM, **T** es punto de tangencia. Calcule AB/BC.

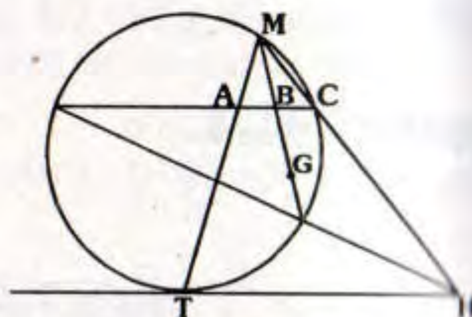
A) 1

B) 1/3

C) 2/3

D) 2

E) 1/2



PROBLEMA Nº 290

Si AH=m y MH=n. Calcule AE/EB.

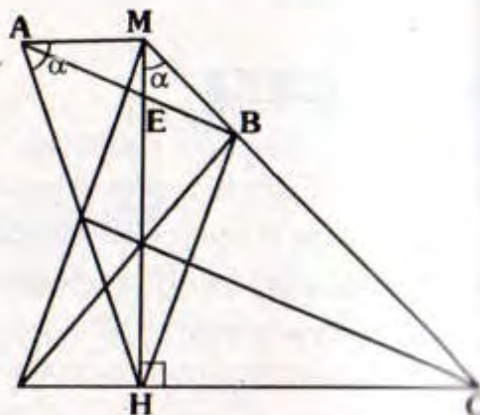
A) $\frac{m}{n}$

B) $\frac{m^2}{n}$

C) $\frac{m}{n^2}$

D) $\frac{m^2}{n^2}$

E) $\frac{n^2}{m^2}$



PROBLEMA Nº 291

Se tiene el triángulo ABC de altura BH. Si m∢ABC=135°, $AH=3-\sqrt{2}$ y $HC=3+\sqrt{2}$. Calcule BH.

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) 1 E) 3

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico, si 3(AB)=2(CD). Calcule $\dfrac{R_1}{R_2}$

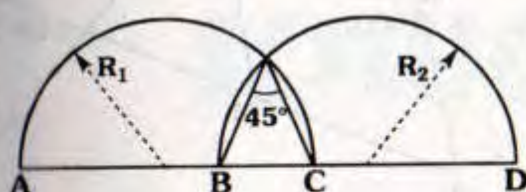
A) 1/3

B) 1/2

C) 2/3

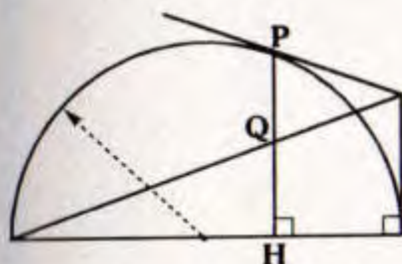
D) 3/5

E) 3/4



PROBLEMA Nº 293

En el gráfico, P es punto de tangencia, halle PQ/QH.



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 294

En un triángulo ABC: BC=a, AC=b, AB=c. Se trazan las bisectrices interiores $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$, tal que la prolongación de $\overline{DE}$ interseca a la prolongación de $\overline{AC}$ en F. Calcule CF.

A) $\dfrac{b.c}{a+b}$ B) $\dfrac{a.b}{c-a}$ C) $\dfrac{a.c}{a+b}$

D) $\dfrac{a.c}{a+b+c}$ E) $\dfrac{b.c}{a+b-c}$

PROBLEMA Nº 295

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$, tal que m∢BAC = 2m∢EBC. Calcular BC, si AB=5μ, AE=3μ y EC=4μ.

A) 3μ B) $2\sqrt{3}$μ C) $3\sqrt{2}$μ

D) $2\sqrt{6}$μ E) $4\sqrt{3}$μ

PROBLEMA Nº 296

En un triángulo isósceles ABC (AB=BC) se traza la ceviana BD, cuya prolongación interseca a la bisectriz exterior de vértice C en E. Calcule CE, si m∢ABD = 3m∢DBC, AD=7μ y DC=3μ.

A) $2\sqrt{3}$μ B) $4\sqrt{3}$μ

C) $3\sqrt{2}$μ D) $\sqrt{15}$μ

E) $\sqrt{21}$μ

PROBLEMA Nº 297

En un trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), M es un punto de $\overline{CD}$, tal que 3(CM)=2(MD) y m∢BAM = m∢CDA.

Si BC=6μ y AD=15μ, calcule AM.

A) 9,6μ B) 10,8μ C) 11,2μ

D) 12,0μ E) 12,4μ

PROBLEMA Nº 298

Dado un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana $\overline{AP}$ en la cual se ubica el punto D tal que $\overline{BD} \perp \overline{AP}$. En $\overline{AC}$ se ubica el punto E tal que ABDE es un trapecio isósceles. Si AD=9μ y DP=4μ, calcule EC.

A) 6μ
B) 9μ
C) 13,5μ
D) 15μ
E) 12μ

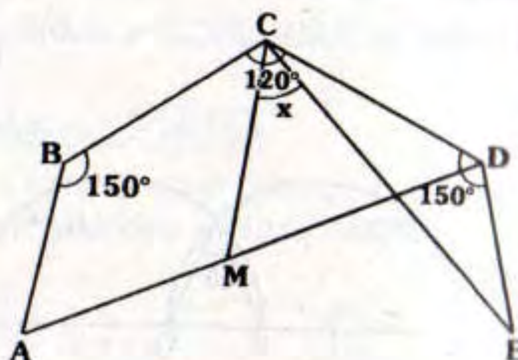
PROBLEMA Nº 299

Desde el punto P, exterior a una semicircunferencia de diámetro AB se traza la tangente PT, tal que $\overline{PB}$ es bisectriz del ángulo APT. Si PT=12μ y PA=10μ, calcule PB.

A) $\frac{72\sqrt{5}}{5}$μ
B) $\frac{72\sqrt{2}}{7}$μ
C) $\frac{72\sqrt{7}}{7}$μ
D) $\frac{36\sqrt{7}}{5}$μ
E) $\frac{36\sqrt{5}}{5}$μ

PROBLEMA Nº 300

En el gráfico, AB=DE, BC=CD y AM=MD. Calcule x.



A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 37°
E) 53°

❖❖❖❖❖❖

Geometría

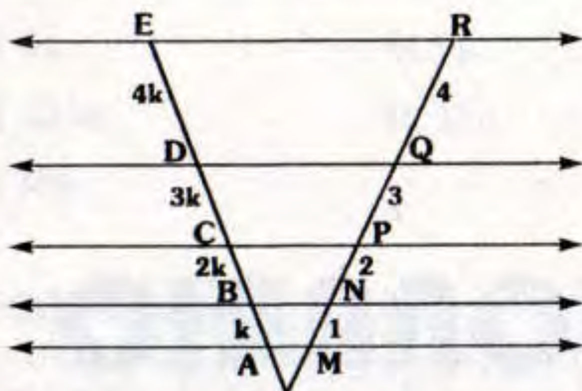
SOLUCIONARIO

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA



RESOLUCIÓN Nº 1



Nos piden $\dfrac{AD}{BD+DE}$

- Como $\overline{AM}//\overline{BN}//\overline{CP}//\overline{DQ}//\overline{ER}$, usemos el teorema de Tales:

  AB=k; BC=2k; CD=3k y DE=4k

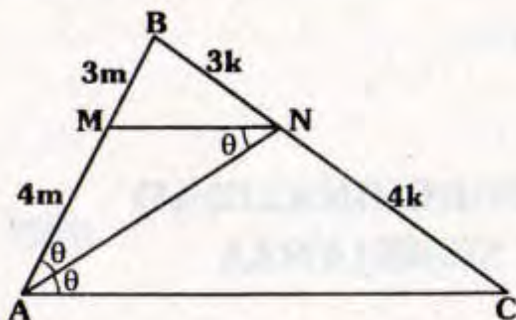
  $\Rightarrow$ AD=6k; BD=5k y DE=4k

- Reemplazando:

$$\frac{AD}{BD+DE}=\frac{6k}{5k+4k}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 2



Nos piden: $\dfrac{BM}{AB}$

Datos AM=MN y 4(BN)=3(NC)

- Del primer dato:

  Como AM=MN $\Rightarrow$ $\triangle$AMN: isósceles

  $\Rightarrow$ m∢MAN = m∢ANM = θ

  $\Rightarrow$ $\overline{MN}//\overline{AC}$

- En el segundo dato:

  4(BN)=3(NC)

  $\Rightarrow$ BN=3k y NC=4k

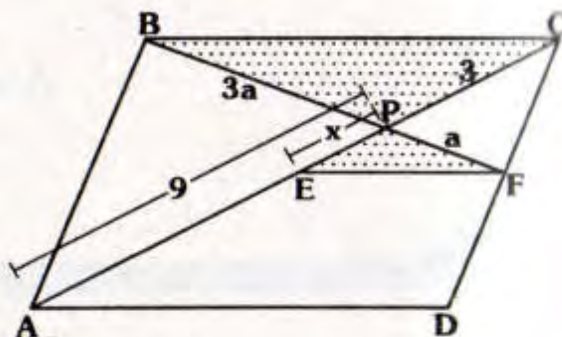
- Por teorema de Tales:

  AM=4m y BM=3m $\Rightarrow$ AB=7m

$$\therefore\quad \frac{\mathbf{BM}}{\mathbf{AB}}=\frac{\mathbf{3m}}{\mathbf{7m}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 3



Piden x.

- Como AP=9 y PC=3, notamos que AP=3(PC) y al ser $\overline{AB}//\overline{FC}$

$$\Rightarrow \quad BP=3(PF)$$

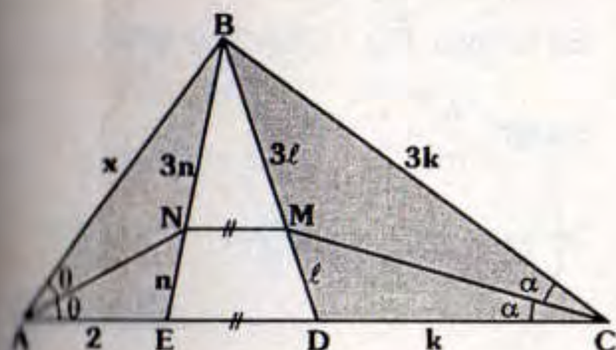
- Observemos también: $\overline{EF}//\overline{BC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{a}{3a}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 4



Piden x.

- En △DBC, por teorema de la bisectriz:

$$BM = 3\ell \text{ y } MD = \ell$$

- Como $\overline{NM}//\overline{ED}$ ⇒ Por teorema de Tales: BN=3n y NE=n

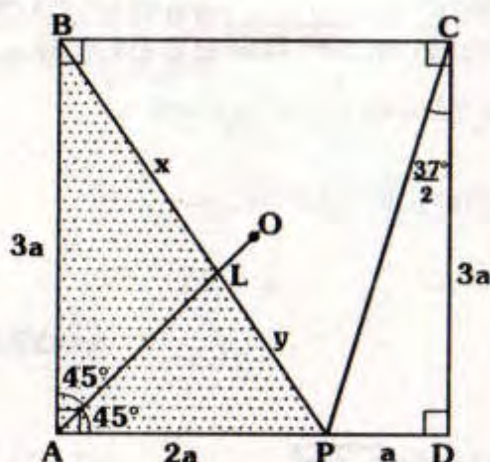
- Finalmente, por teorema de la bisectriz en △ABE:

$$\frac{x}{2}=\frac{3\ell}{\ell}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=6}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 5



Nos piden $\frac{x}{y}$.

- Como O es centro

$$\Rightarrow m\measuredangle PAL = m\measuredangle LAB = 45°$$

- ⊿PDC: notable de $\frac{37°}{2}$

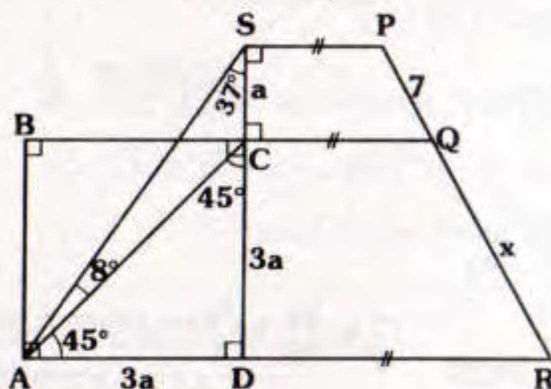
$$\Rightarrow \quad PD=a \text{ y } CD=3a$$

- ⊿BAP, notamos que AB=3a y AP=2a, por teoerma de la bisectriz:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\frac{3\cancel{a}}{2\cancel{a}}=\frac{3}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 6



Nos piden x.

- Al completar "ángulos", notamos que:

  $\measuredangle$ADC es notable de 45° y $\measuredangle$ADS es notable de 37°, sea AD=DC=3a.

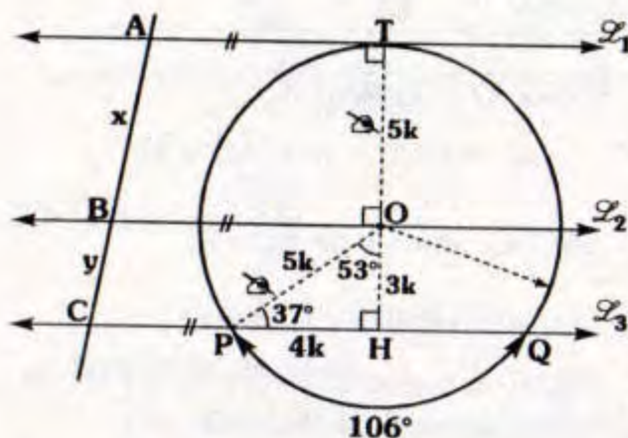
  $\Rightarrow$ SD=4a $\Rightarrow$ SC=a

- Como $\overline{SP}//\overline{CQ}//\overline{DR}$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{7}=\frac{3a}{a}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=21}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 7



Piden: $\frac{x}{y}$.

- Por propiedad: $\overline{OT}\perp\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

  $\Rightarrow$ al prolongar $\overline{TO}$ hasta H, tendremos: $\overline{OH}\perp\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$

- $\measuredangle$PHO: notable de 37°

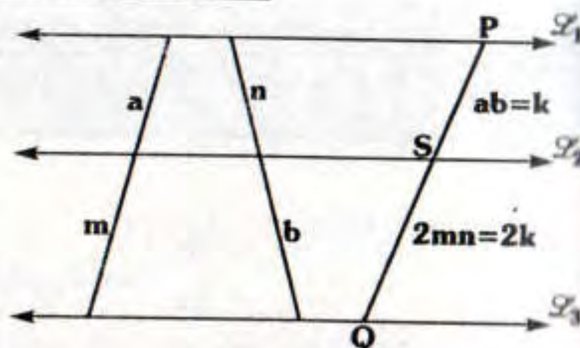
  $\Rightarrow$ Si OH=3k $\Rightarrow$ OP=OT=5k

- Por teorema de Tales:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\frac{\mathbf{5k}}{\mathbf{3k}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 8



Piden $\frac{a}{m}+\frac{n}{b}$.

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, por teorema de Tales:

  $\frac{a}{m}=\frac{n}{b}$ $\Rightarrow$ ab=mn

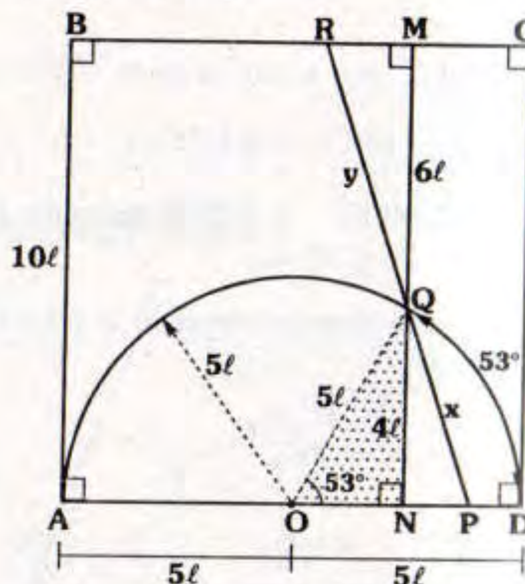
- En la línea $\overline{PQ}$: QS=2k y SP=k

- Luego: $\frac{a}{m}=\frac{1}{2}$ y $\frac{n}{b}=\frac{1}{2}$

  $\Rightarrow$ $\frac{a}{m}+\frac{n}{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\mathbf{1}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 9



Nos piden x/y

- Desde Q trazamos una recta paralela a $\overline{CD}$.
- ◺ONQ: notable de 53°

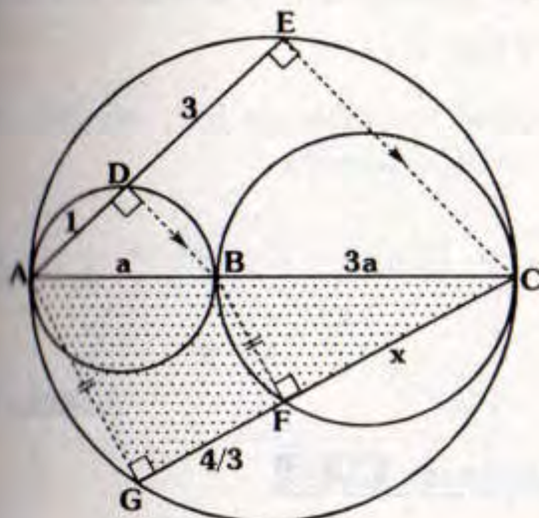
  $\Rightarrow$ OQ=5ℓ y NQ=4ℓ

  $\Rightarrow$ AD=AB=10ℓ $\Rightarrow$ QM=6ℓ
- Como $\overline{RM}//\overline{NP}$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{y}=\frac{4\ell}{6\ell}$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{2}{3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 10



Nos piden x.

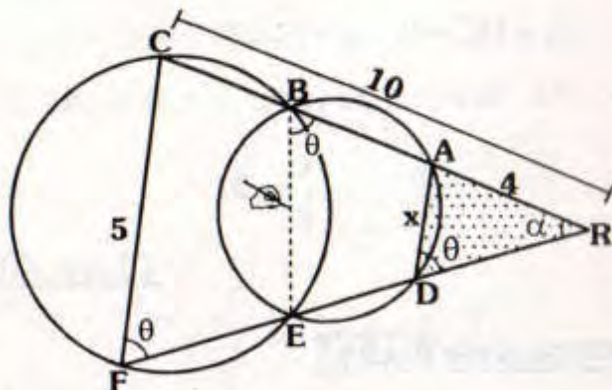
- Como $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros

  $\Rightarrow$m∢ADB=m∢AEC=m∢AGC=m∢BFC=90°
- Luego $\overline{DB}//\overline{EC}$ y $\overline{AG}//\overline{BF}$
- Por teorema de Tales: $\frac{BC}{AB}=\frac{3}{1}$
- Como $\frac{BC}{AB}=\frac{x}{\left(\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow 3=\frac{x}{\left(\frac{4}{3}\right)}$

$$\therefore \quad x=4$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 11



Nos piden x.

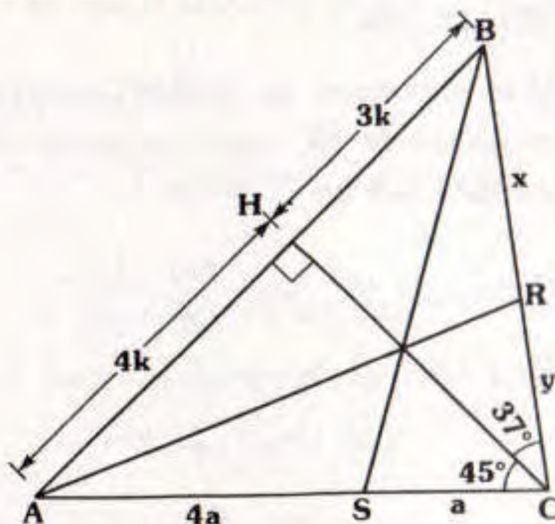
- Aprovechemos la presencia de circunferencias, trazando la cuerda común.
- Luego: m∢CFR = m∢EBR = m∢ADR

  $\Rightarrow$ $\overline{FC}//\overline{DA}$
- ΔFCR~ΔDAR $\Rightarrow$ $\frac{x}{4}=\frac{5}{10}$

$$\therefore \quad x=2$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 12



Nos piden: x/y

- Como hay cevianas concurrentes, la idea es usar el teorema de Ceva.

- $\measuredangle$BHC notable de 37° y $\measuredangle$AHC notable de 45°

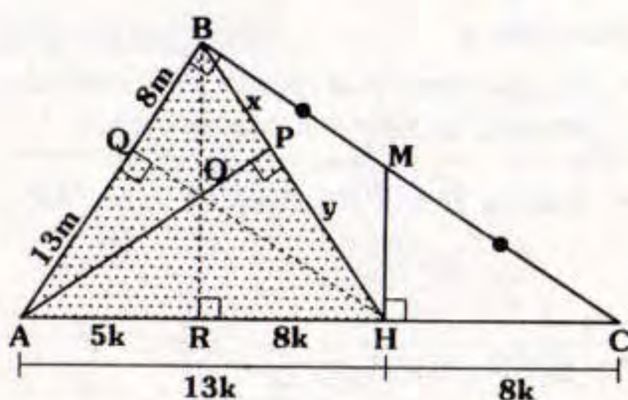
  Sea HC=4k $\Rightarrow$ HB=3k y AH = 4k

- Por Teorema de Ceva: x.a.4k=y.4a.3k

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=3$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 13



Nos piden: $\frac{x}{y}$

- Como BM=MC $\Rightarrow$ al trazar $\overline{BR} \perp \overline{AC}$

$\Rightarrow$ RH=HC=8k

- O es ortocentro del ΔABH $\Rightarrow$ la prolongación de $\overline{HO}$ corta perpendicularmente a $\overline{AB}$ en Q.

- Como $\overline{QH}//\overline{BC}$ $\Rightarrow$ $\frac{AQ}{QB}=\frac{13}{8}$

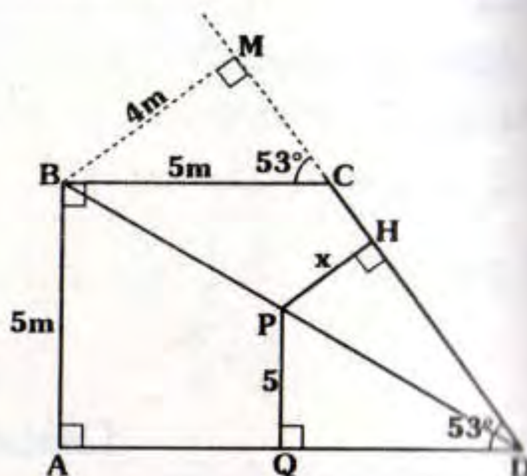
- En ΔABH, por teorema de Ceva:

  x.8k.13m=y.5k.8m

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{5}{13}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 14



Piden: x

- Se prolonga $\overline{DC}$ y se traza $\overline{BM} \perp \overline{DC}$ (M en $\overleftrightarrow{DC}$)

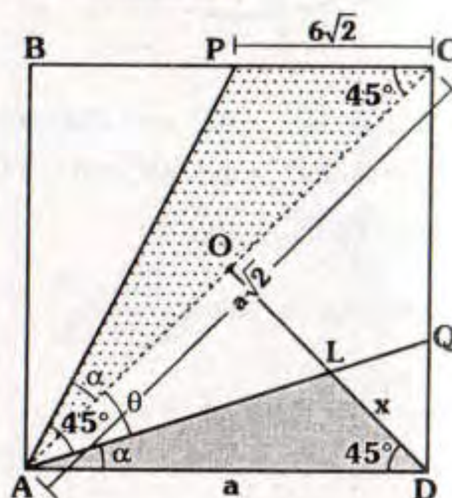
- $\measuredangle$BMC notable de 53°, sea BM=4m $\Rightarrow$BC=AB=5m

- Como $\overline{PQ}//\overline{BA}$ y $\overline{PH}//\overline{BM}$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{4m}=\frac{5}{5m}$

$$\therefore \quad x=4$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 15



Piden x.

- Notemos que $\alpha+\theta=45°$

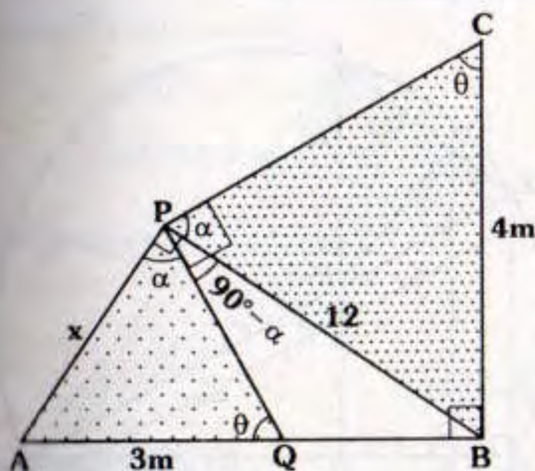
- Al trazar la diagonal $\overline{AC}$, notamos que $m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle LAD = \alpha$
- Luego $\Delta APC \sim \Delta ALD$

$$\Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$$

$$\therefore \mathbf{x = 6}$$

Clave A

Resolución Nº 16



Piden x.

- Notemos: $m\sphericalangle QPB = 90° - \alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QPC = 90°$$

- ⌂QPCB es inscriptible

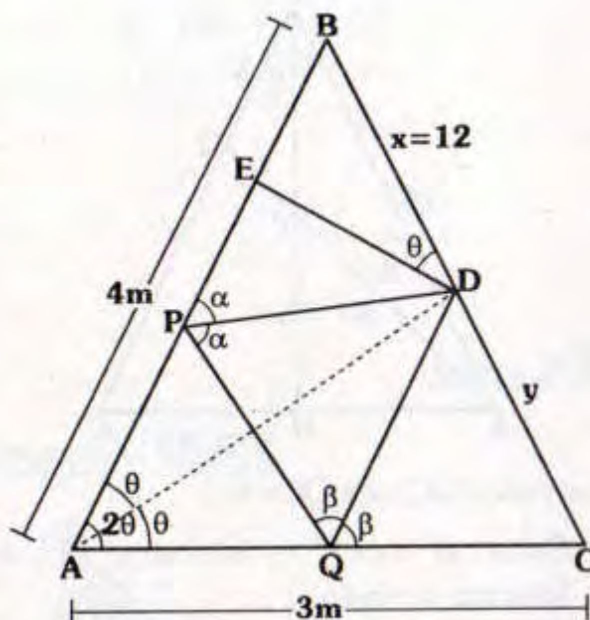
$$\Rightarrow m\sphericalangle AQP = m\sphericalangle PCB = \theta$$

- $\Delta PQA \sim \Delta PCB \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{3m}{4m}$

$$\therefore \mathbf{x = 9}$$

Clave D

Resolución Nº 17



Nos piden BC.

Dato: (AB)(EB) = 144

- Sea BD=x y DC=y ⇒ BC=x+y
- Como D es excentro del ΔAPQ ⇒ $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del ángulo BAC.
- En el ΔADB:

$$x^2 = \underbrace{(BE)(AB)}_{144} \Rightarrow x = 12$$

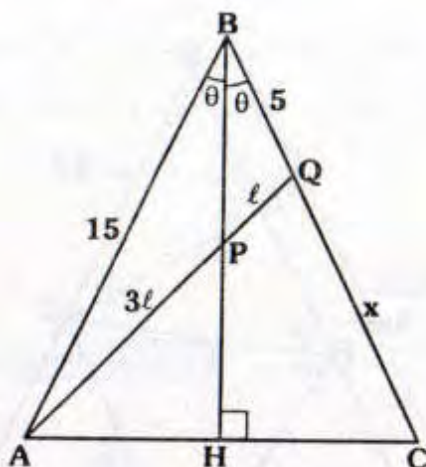
- En el ΔABC, por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{y} = \frac{4m}{3m} \Rightarrow y = 9$$

$$\therefore \mathbf{BC = x + y = 21}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 18



Nos piden QC, sea QC=x

- Como el $\triangle ABC$ es isósceles, $\overline{BH}$ es bisectriz también.
- En $\triangle ABQ$:

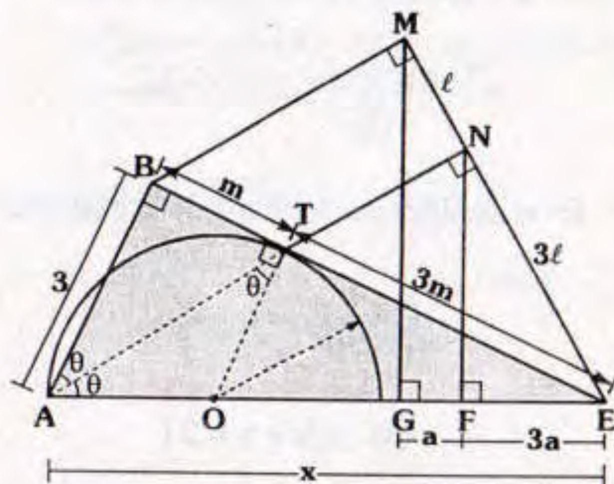
$$\frac{AB}{5}=\frac{3\ell}{\ell} \Rightarrow AB=15$$

- Como $AB=BC \Rightarrow x+5=15$

$$\therefore \ \mathbf{x=10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 19



Nos piden AE

- Como $FE=3(GF) \Rightarrow$ Por teorema de Tales:

$$EN=3(NM) \ \text{y} \ ET=3(TB)$$

- AOT: isósceles y $\overline{OT}//\overline{AB}$

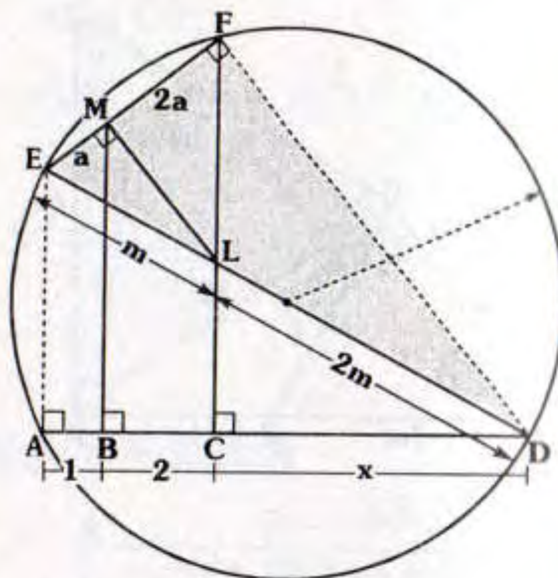
$\Rightarrow m\measuredangle BAT = m\measuredangle TAE$, por teorema de la bisectriz en el $\triangle ABC$:

$$\frac{x}{3}=\frac{3m}{m}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=9}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 20



Piden x.

- Notemos que $\overline{ML}//\overline{FD}$ y $\overline{EA}//\overline{MB}//\overline{FC}$
- Por teorema de Tales:

$$FM=2(EM) \ \text{y} \ LD=2(LE)$$

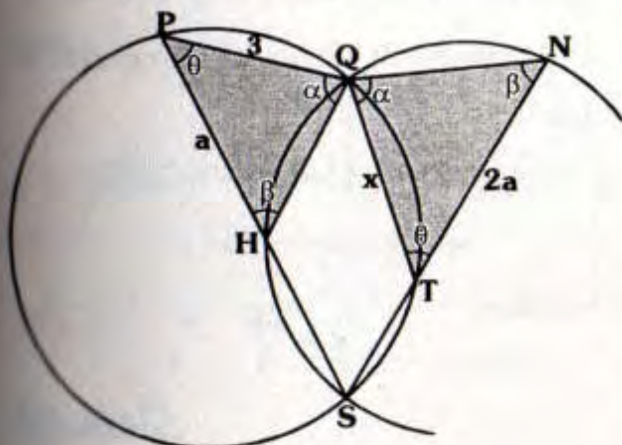
$$\Rightarrow \underbrace{CD}_{x}=2(AC)$$

$$x=2(3)$$

$$\therefore \ \mathbf{x=6}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 21



Nos piden x.

- Notemos que: ⌂SHQN y ⌂PQTS son cuadriláteros inscritos.

$\Rightarrow m\measuredangle QPS = m\measuredangle QTN$ y

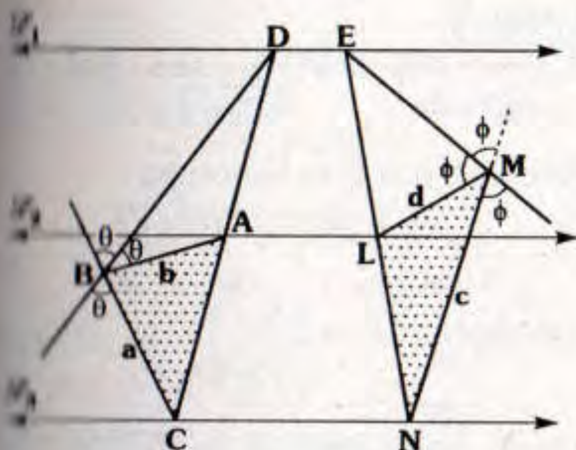
$m\measuredangle QNS = m\measuredangle QHP$

- $\Delta PQH \sim \Delta TQN \Rightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{2\cancel{a}}{\cancel{a}}$

$\therefore \quad \mathbf{x = 6}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 22



Nos piden la relación entre a, b, c y d.

- Notemos que $\overline{BD}$ y $\overline{ME}$ son bisectrices exteriores de los triángulos CBA y NML respectivamente, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{CD}{DA} \text{ y } \frac{c}{d} = \frac{NE}{EL}$$

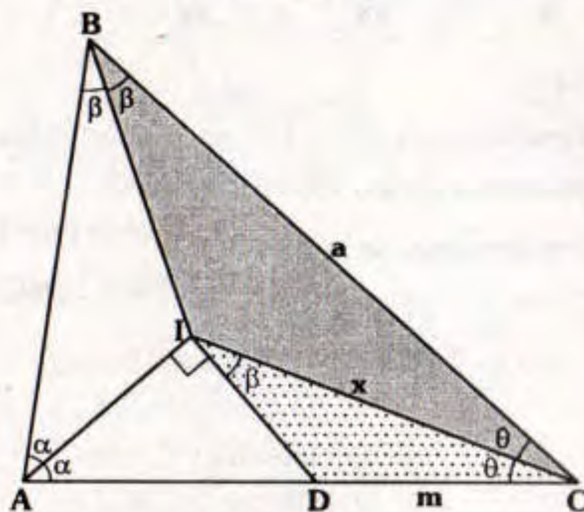
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{NE}{EL} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$\therefore \quad \mathbf{ad = bc}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 23



Nos piden x.

Dato: am=64

- Como I es incentro

$\Rightarrow m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \beta$ y

$m\measuredangle AIC = 90° + \beta \Rightarrow m\measuredangle DIC = \beta$

También $m\measuredangle ACI = m\measuredangle ICB = \theta$

- Luego $\Delta ICS \sim \Delta BCI$

$$\Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = am$$

$\therefore \quad \mathbf{x = 8}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 24

Piden x.

- Notemos que $\overline{BP}$ y $\overline{DP}$ son bisectrrices interiores de los Δs ABC y ADC
- Por teorema de la bisectriz:

$$\frac{18}{12}=\frac{AP}{PC} \quad y \quad \frac{15}{x}=\frac{AP}{PC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18}{12}=\frac{15}{x}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 25

Nos piden x.

- Por propiedad de circunferencia:

AP=AT=3; TC=CQ y NQ=PM=3

- Por teorema de Menelao para el ΔABC (recta secante: $\overleftrightarrow{MNE}$):

$$(AM)(BN)(CE)=(MB)(NC)(EA)$$

$$\Rightarrow \quad 7\cdot a\cdot x=a\cdot 4(5+x)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{20}{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 26

Nos piden PC.

- Como MG=2(AM), sea AM=2k $\Rightarrow$MG=4k
- Debido a que G es baricentro

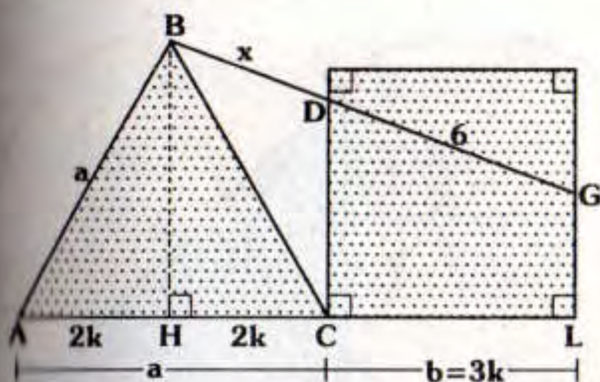
$$\Rightarrow \quad GS=3k \quad y \quad BS=SC$$

- Como $\overline{MB}//\overline{GP} \Rightarrow \frac{PS}{4}=\frac{3k}{4k} \quad \Rightarrow \quad PS=3$
- Como $\overline{AS}$ es mediana $\Rightarrow$ BS=SC=7

$$\therefore \quad \mathbf{PC=10}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 27



Piden x.

- Como las regiones sombreadas son regulares e isoperimétricos:

$$3a=4b \Rightarrow b=3k \text{ y } a=4k$$

- Al trazar la altura BH del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \quad AH=HC=2k$$

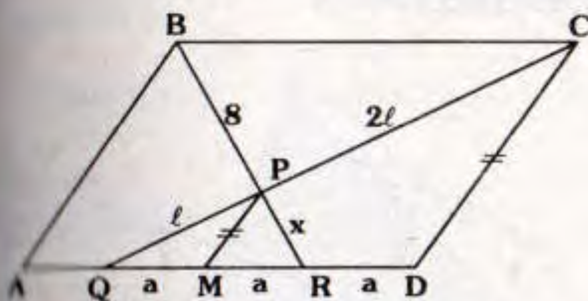
- Como: $\overline{BH}//\overline{DC}//\overline{GL}$ (T. Tales):

$$\Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{2k}{3k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 28



Piden x.

- Como $\overline{MP}//\overline{DC} \Rightarrow CP=2(PQ)$

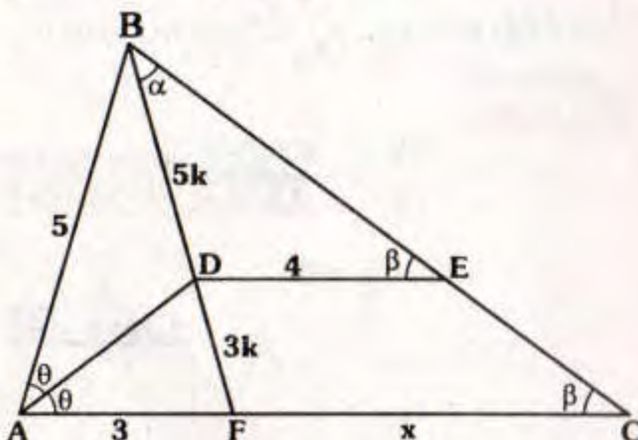
- Por corolario del teorema de Tales:

$$\Rightarrow \frac{x}{8}=\frac{\ell}{2\ell}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 29



Piden x.

- En el $\triangle FBA$, por teorema de la bisectriz:

$$BD=5k \text{ y } DF=3k$$

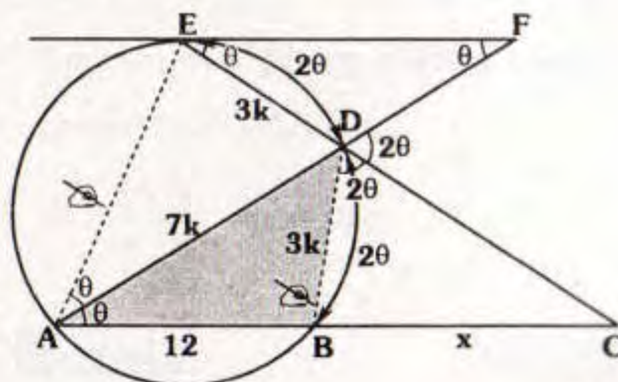
- $\triangle FBC \sim \triangle DBE$

$$\Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{8\cancel{k}}{5\cancel{k}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=6,4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 30



Piden x.

- Como $m\widehat{ED} = m\widehat{DB}$

$\Rightarrow m\measuredangle EAD = m\measuredangle DAB = \theta$

$\Rightarrow m\measuredangle DEF = m\measuredangle DFE = \theta$

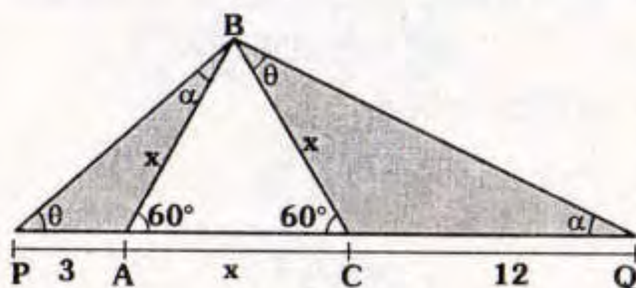
- Notemos que ED=DB y que para el $\triangle ADB$ la línea $\overline{DC}$ es bisectriz exterior, entonces:

$$\frac{3\not{k}}{7\not{k}} = \frac{x}{x+12}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 9}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 31



Piden x.

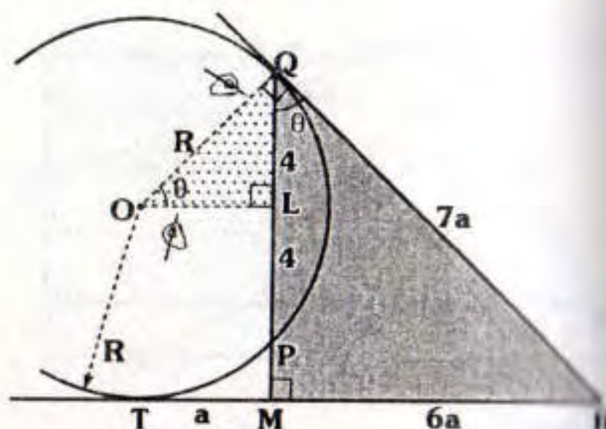
- Sea $m\measuredangle PBA = \alpha \Rightarrow \alpha+\theta=60°$, luego $m\measuredangle CQB = \alpha$
- Luego $\triangle PBA \sim \triangle BCQ$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{3}{x}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 32



Nos piden R.

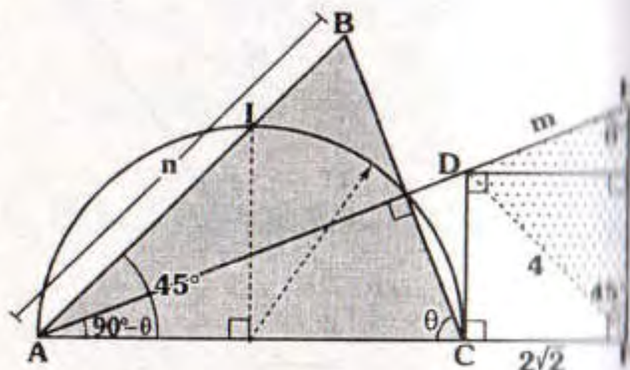
- Se traza $\overline{OL} \perp \overline{QP}$ (L en $\overline{QP}$)
  $\Rightarrow$ QL=LP=4
- Sea TM=a por dato: QR=7a, como RQ=RT=7a $\Rightarrow$ MR=6a
- Notemos: $\triangle OLQ \sim \triangle QMR$

$$\Rightarrow \frac{R}{4} = \frac{7\not{a}}{6\not{a}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{R = \frac{14}{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 33



Nos piden BC.

Datos: $mn=40$ y $CF=2\sqrt{2}$

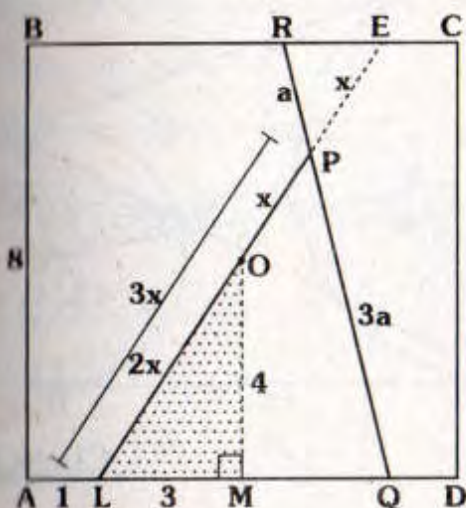
- Como CDEF es un cuadrado $\Rightarrow DF=4$
- Notemos que: $\triangle ACB \sim \triangle FHD$

$$\Rightarrow \frac{BC}{m}=\frac{n}{4} \Rightarrow BC=\frac{mn}{4}$$

$\therefore$ **BC = 10**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 34



Nos piden x.

- Prolongemos $\overline{LP}$ hasta que corte a $\overline{RC}$ en E.
- Como PQ=3(RP), por teorema de Tales:

LP=3(PE), sea PE=x

$\Rightarrow$ LP=3x, como LO=OE=2x

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{AD}$

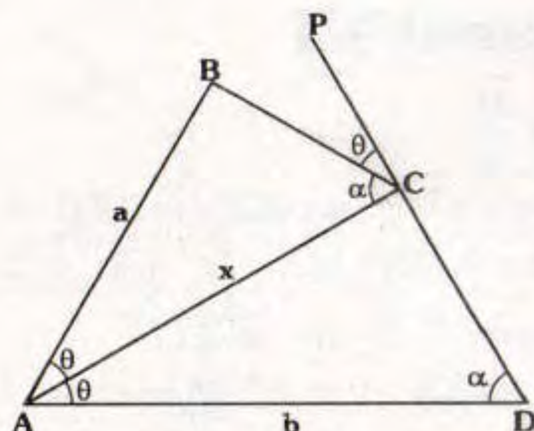
$\Rightarrow AM=MD=OM=4$

- En ⊿LMO: $2x=5$

$\therefore$ **x = 2,5**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 35



Piden x.

- Sea $m\sphericalangle ADC=\alpha \Rightarrow$ por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle ACP=\alpha+\theta \Rightarrow m\sphericalangle BCA=\alpha$$

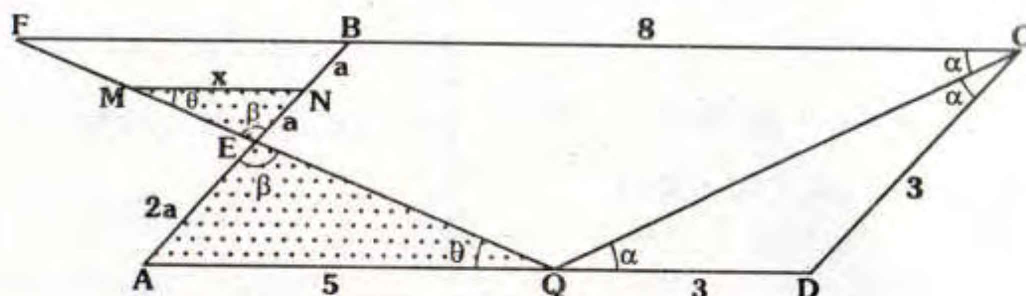
- $\triangle ACB \sim \triangle ADC$

$$\Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{a}{x}$$

$\therefore$ $\mathbf{x=\sqrt{ab}}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 36



Nos piden x.

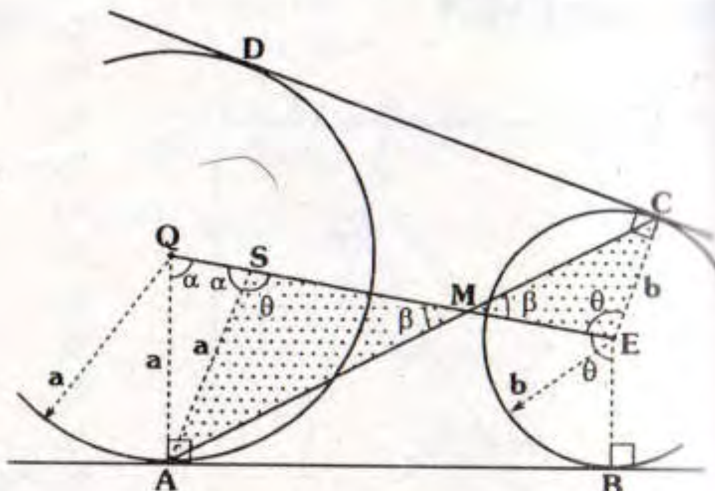
- Observamos que $\triangle QDC$ es isósceles: $QD=DC=3 \Rightarrow AQ=5$
- $\triangle AEQ \sim \triangle NEM \Rightarrow \dfrac{x}{5}=\dfrac{a}{2a}$ $\therefore$ $\mathbf{x=2,5}$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 37

Piden $\dfrac{AM}{MC}$.

- Notemos que: $m\measuredangle QEB = m\measuredangle QEC = \theta$
  y $\alpha + \theta = 180°$
- Se traza $\overline{AS}$ tal que $\overline{AS} // \overline{EC}$
  $\Rightarrow m\measuredangle ASE = \theta \Rightarrow \triangle AQS$: isósceles
- $\triangle ASM \sim \triangle CEM \Rightarrow \dfrac{AM}{MC}=\dfrac{a}{b}$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 38

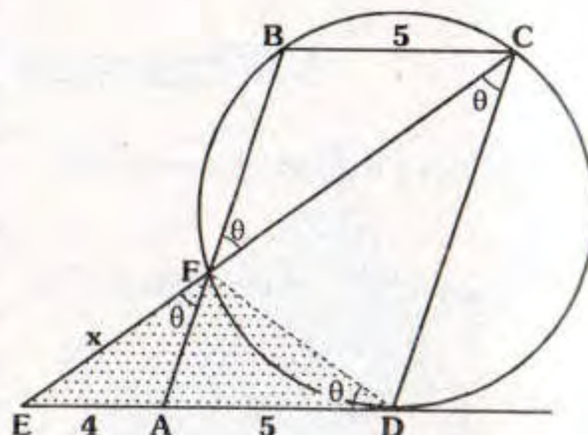
Nos piden x.

- Notemos que $m\measuredangle AFE = m\measuredangle FDA$
- En el $\triangle EFD$, por propiedad de semejanza:

$$x^2=(EA)(ED)$$

$$x^2=(4)(9)$$

$\therefore$ $\mathbf{x=6}$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 39

Nos piden x.

- Como $m\widehat{QD} = m\widehat{QB} \Rightarrow m\sphericalangle QAC = m\sphericalangle QPC$

  $\Rightarrow$ ⌂APQC es inscriptible.

- Deducimos que $m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle BQC$

  $\Rightarrow$ en el ΔBQC, por propiedad:

  $$x^2 = b(b+a)$$

  $$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{b(b+a)}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 40

- Nos piden x en función de R, r y c
- Como $m\widehat{QLB} = m\widehat{BS}$

  $$\Rightarrow m\sphericalangle BAS = m\sphericalangle QO_1O_2 = \alpha$$

  También: $m\sphericalangle BCM = m\sphericalangle QO_2O_1 = \theta$

- $\Delta O_1QO_2 \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{x}{r} = \dfrac{c}{R}$

  $$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{cr}{R}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 41

Nos piden: x/y.

- Por propiedad de circunferencia:

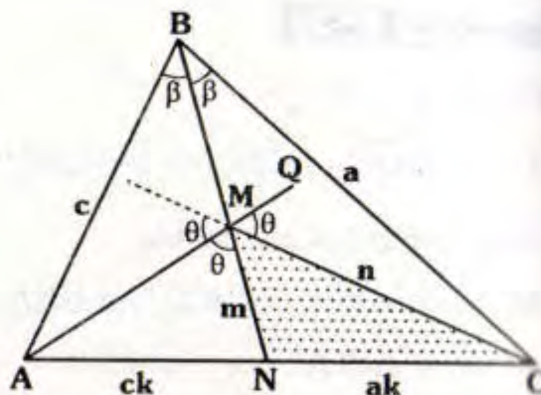
  $$m\sphericalangle ANM = 45° \Rightarrow \overline{NM} // \overline{BC}$$

- Por teorema de Tales:

  $$\frac{x}{y} = \frac{3k}{2k} \qquad \therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = \frac{3}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 42



- Nos piden la relación entre a, c, m y n.
- En $\triangle ABC$, por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{c}{a} \Rightarrow AN=ck \text{ y } NC=ak$$

- En $\triangle NMC$, $\overline{MA}$ es bisectriz exterior:

$$\frac{m}{n}=\frac{ck}{(c+a)k} \Rightarrow nc=m(c+a)$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 43

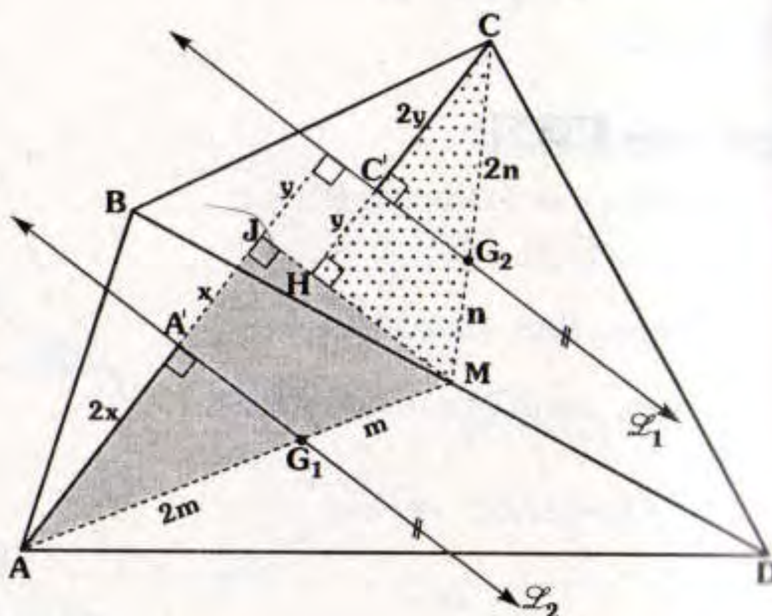
- Piden la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.
- Como G_1 y G_2 son baricentros $\Rightarrow$ al prolongar $\overline{AG_1}$ y $\overline{CG_2}$ llegarán al punto medio de $\overline{BD}$.
- Por teorema de Tales:

$CC'=2y;\ C'H=y;$

$AA'=2x;\ A'J=x$

$\Rightarrow 2x+2y=9$

$\therefore\ \mathbf{x+y=4,5}$



Clave A

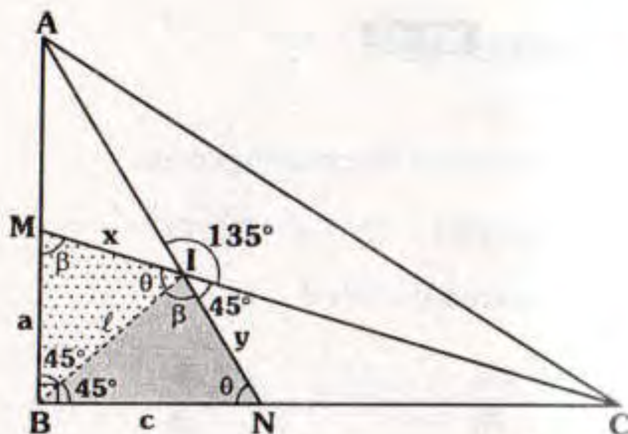
RESOLUCIÓN Nº 44

- Piden la relación entre a, c, x e y.
- Como I es incentro del ⊿ABC

$\Rightarrow m\measuredangle AIC=135°\ (\theta+\beta=135°)$

- $\triangle BIM \sim \triangle BNI \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{\ell}=\dfrac{\ell}{c}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{a}{c} \qquad \therefore\ \mathbf{cx^2=ay^2}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 45

- Nos piden x .
- Al completar "ángulos", notaremos: $\overline{BN} \perp \overline{AC}$ y en el $\triangle QBC$ la línea $\overline{BH}$ es bisectriz interior.
- Por el triángulo notable de 30°/60°; sea $MQ=QN=a\sqrt{3} \Rightarrow QB=3a$ y $NB=2a\sqrt{3} \Rightarrow BC=4a$
- En $\triangle QBC$, por teorema de la bisectriz:

$$\Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{4a}{3a}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 46

- Nos piden x.
- Notemos que el ⌂BESA es inscriptible.
- Sea $m\measuredangle AES=\theta \Rightarrow m\measuredangle ABS=\theta$ y $m\measuredangle BAC=90°-\theta$
- ⌂AFEC:

$m\measuredangle FEB=90°-\theta \Rightarrow m\measuredangle FEA=\theta$

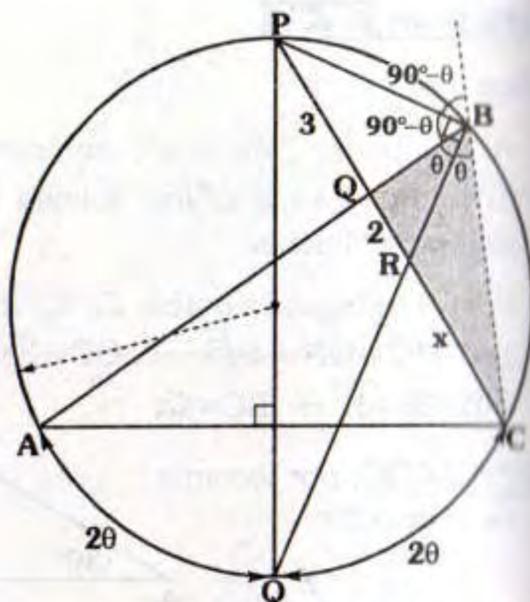
- En $\triangle MSE$: $\overline{EQ}$ y $\overline{EB}$ son bisectriz interior y exterior ⇒ S, Q, M y B forman una cuaterna armónica.

$$\Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{15+x}{12}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 47



- Nos piden x.
- Como: $m\widehat{AQ} = m\widehat{QC} \Rightarrow m\measuredangle ABQ = m\measuredangle QBC$
- Luego, en $\triangle QBC$, $\overline{BR}$ es bisectriz interior y $\overline{BP}$ es bisectriz exterior.
- C, R, Q y P forman una cuaterna armónica.

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{5+x}{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 48

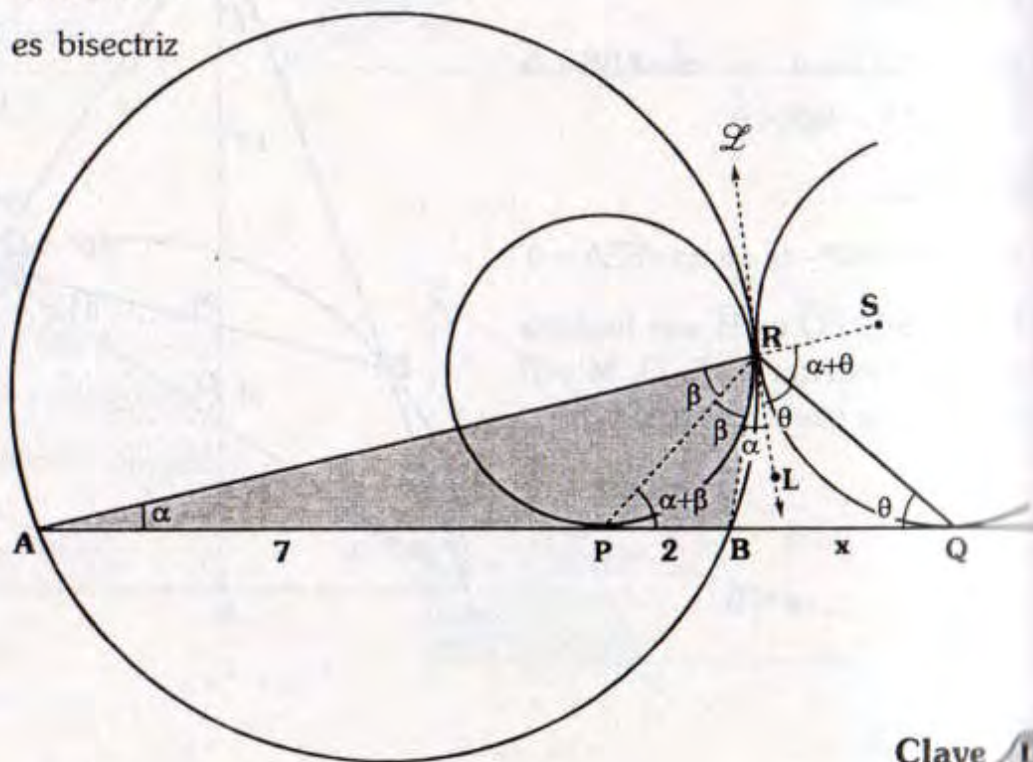
- Nos piden x.
- Tracemos la tangente común $\mathscr{L}$.

  Sea : $m\measuredangle RAB = \alpha \Rightarrow m\measuredangle BRL = \alpha$; $m\measuredangle LRQ = m\measuredangle BQR = \theta \Rightarrow m\measuredangle QRS = \alpha + \theta$

- En $\triangle ARB$: $\overline{RP}$ es bisectriz interior y $\overline{RQ}$ es bisectriz exterior.

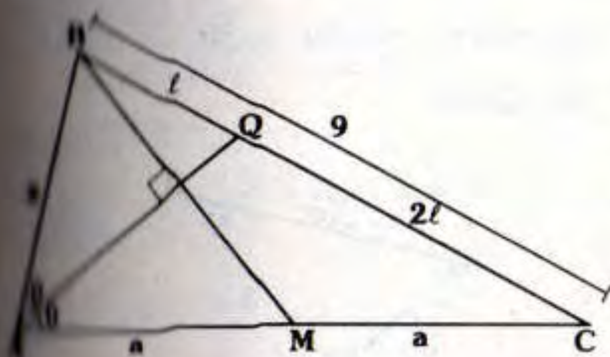
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{9+x}{7}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 3,6}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 49



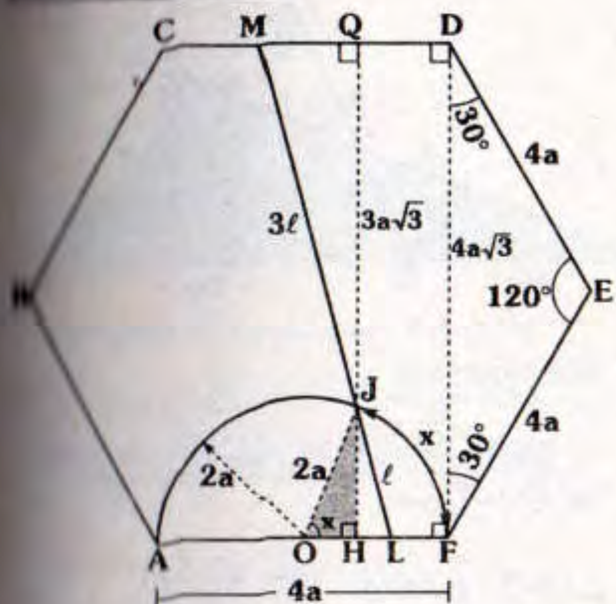
Piden QC

- $\triangle$ABM: isósceles $\Rightarrow$ AB=AM=a
- En $\triangle$ABC, por teorema de la bisectriz interior: BQ= ℓ y QC= 2ℓ
- Como: $3\ell=9 \Rightarrow \ell=3$

$\therefore$ **QC = 6**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 50



- Nos piden x.
- Notemos que :

AF//CD $\Rightarrow \dfrac{JL}{MJ}=\dfrac{JH}{JQ} \Rightarrow$ JH=$a\sqrt{3}$ y JQ=$3a\sqrt{3}$

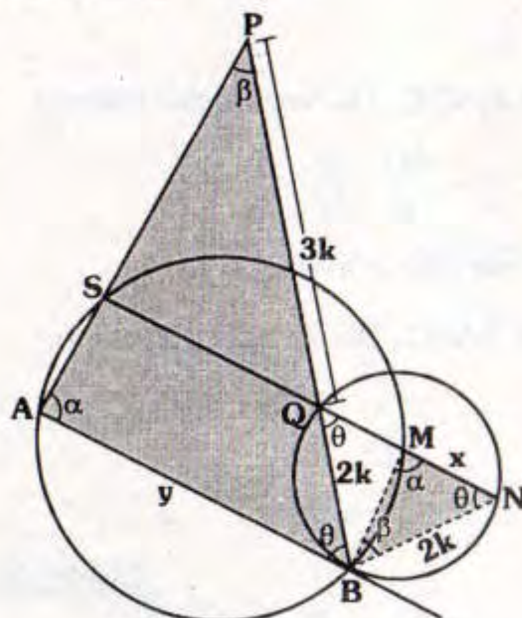
- FD=HQ=$4a\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ FE=4a
- Del gráfico ($\triangle$OHJ):



$\therefore$ **x = 60°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 51



- Nos piden $\dfrac{x}{y}$.
- $\square$ASMB: $\square$inscrito

$\Rightarrow$ m∢SAB = m∢BMN = α

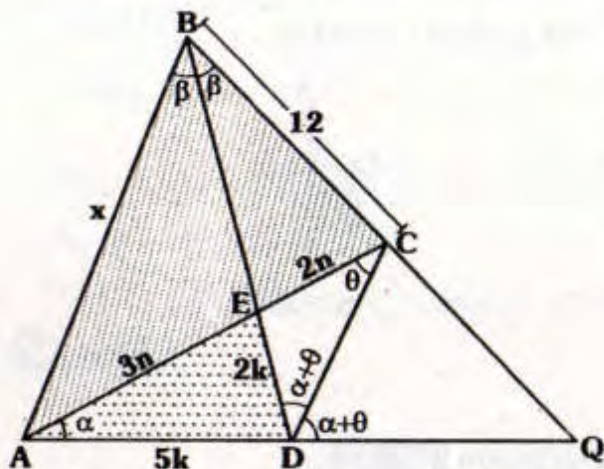
- m∢MNB = m∢QBA = θ
- $\triangle$APB~$\triangle$MNB

$\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{2k}{5k}$

$\therefore$ $\mathbf{\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{5}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 52



Piden x.

- En $\triangle ADE$, $\overline{DC}$ es bisectriz exterior.

$$\Rightarrow \frac{AD}{DE}=\frac{AC}{EC}$$

$$\Rightarrow AC=5n \text{ y } EC=2n$$

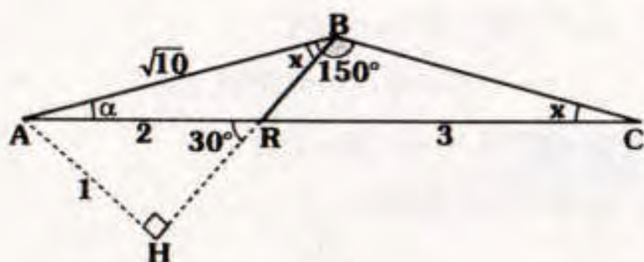
- En $\triangle ABC$, $\overline{BE}$ es bisectriz interior:

$$\frac{x}{12}=\frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=18}$$

Clave D

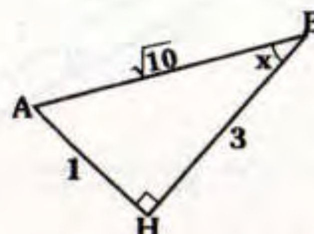
RESOLUCIÓN Nº 53



- Nos piden x.
- Como m∢ACB = m∢ABR, por propiedad:

$$(AB)^2=(2)(5) \Rightarrow AB=\sqrt{10}$$

- En ⊿AHR: notable de 30° ⇒ AH=1
- En ⊿AHB:

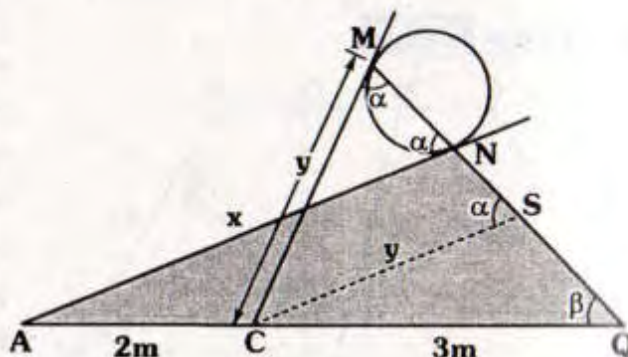


Notemos que es notable.

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{37^\circ}{2}=18,5^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 54



- Nos piden x/y.
- Se traza $\overline{CS}//\overline{AN}$ ⇒ $\triangle CMS$: isósceles
  ⇒ CM=CS=y
- $\triangle CSQ \sim \triangle ANQ \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=\frac{5m}{3m}$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y}=\frac{5}{3}}$$

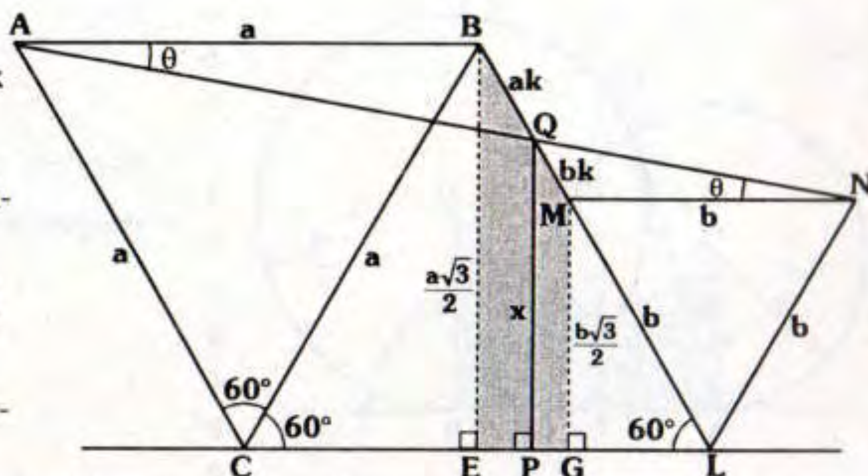
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 55

- Nos piden x.
- Como $\overline{AB}//\overline{MN}$ $\Rightarrow$ BQ=ak y QM=bk
- $\triangle$ABC y $\triangle$MNL son equiláteros

$$\Rightarrow BE=\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ y } MG=\frac{b\sqrt{3}}{2}$$

- En el trapecio EBMG, por propiedad:



$$x=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)bk+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)ak}{(a+b)k} \qquad \therefore \quad \mathbf{x=\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 56

- Nos piden $m\overset{\frown}{MB}$.
- En $\triangle$LMA y $\triangle$LMN:

$$\left.\begin{aligned} b^2&=(MS)(ML)\\ a^2&=(MS)(ML)\end{aligned}\right\} a=b$$

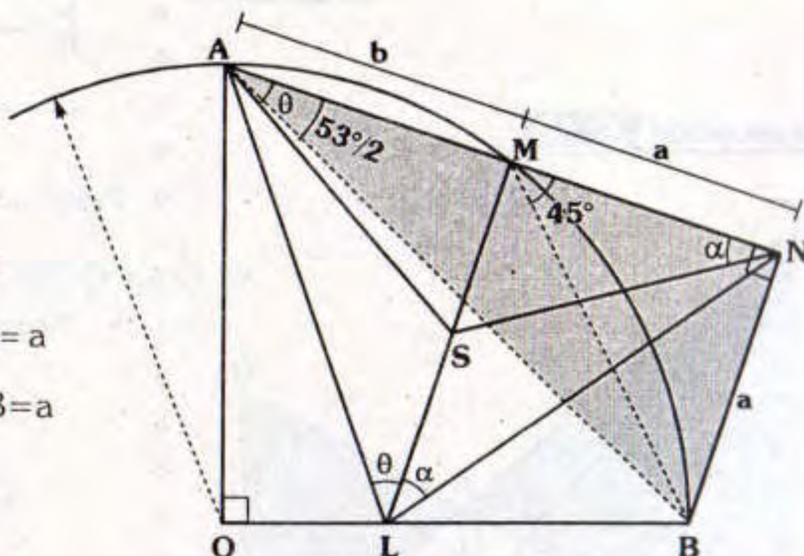
- Por propiedad de circunferencia:

$$m\measuredangle BMN=45° \Rightarrow BN=NM=a$$

- Como en ⊿AMN: AN=2a y NB=a

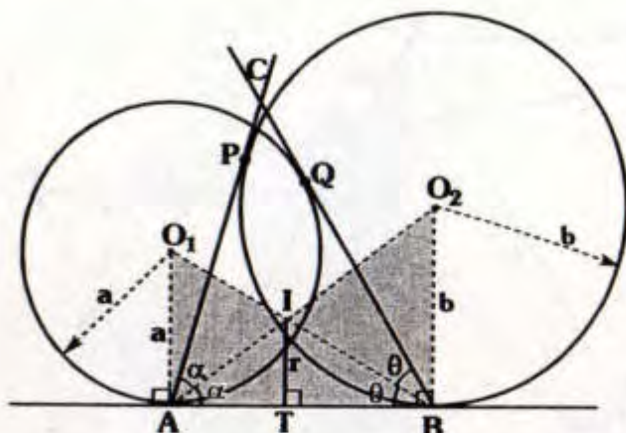
$$\Rightarrow m\measuredangle BAN=\frac{53°}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\overset{\frown}{MB}=53°}$$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 57

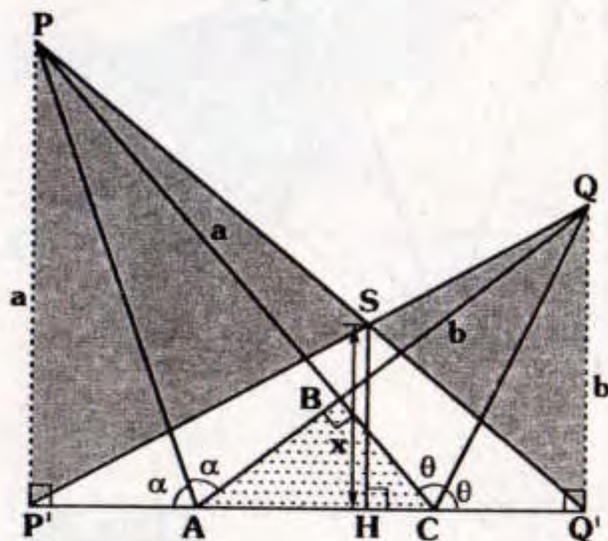


- Nos piden el inradio (r) del $\triangle ABC$.
- Como $\overline{BO_1}$ y $\overline{AO_2}$ son bisectrices $\Rightarrow$ $\overline{BO_1} \cap \overline{AO_2} = \{I\}$, **I** es incentro del $\triangle ABC$.
- Por propiedad de semejanza (pág. 26), como $\overline{O_1A} // \overline{IT} // \overline{O_2B}$:

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 58



Nos Piden x.

- Como AP'=AB $\Rightarrow \measuredangle ABP \cong \measuredangle AP'P$

  $\Rightarrow$ m∢ABP=m∢AP'P=90° y PP'=a

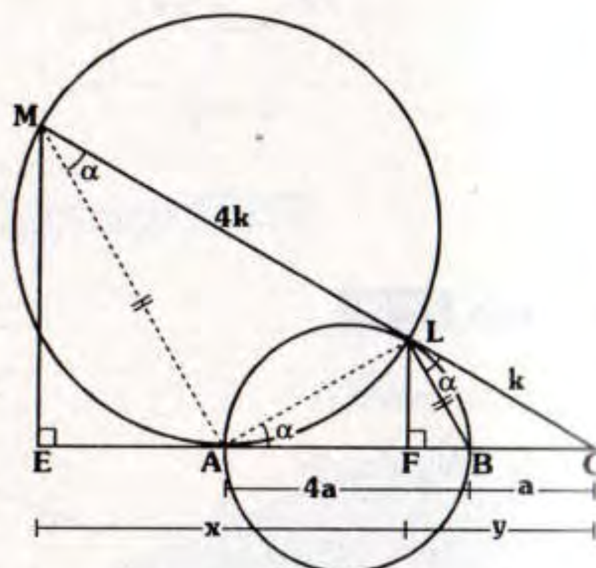
  $\Rightarrow$ AC=5n y EC=2n

- También $\overline{QQ'} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y QQ'=b
- Por propiedad de semejanza:

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 59



Piden x/y.

- Dato AB=4(BC)
- Notemos que:

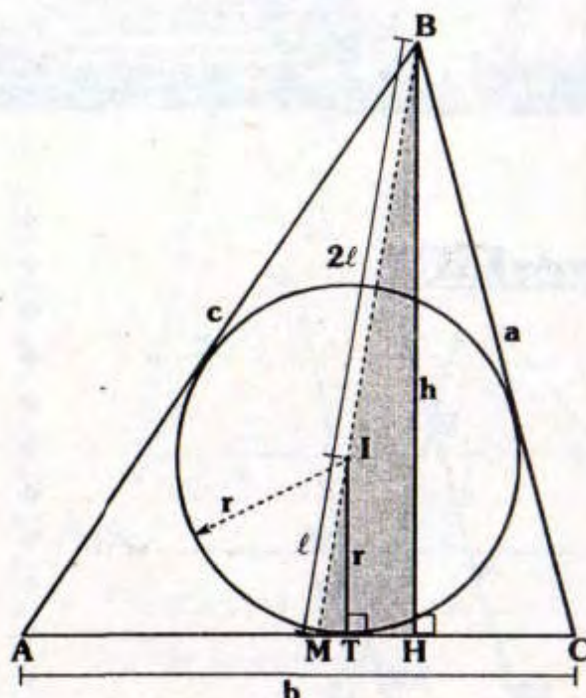
$\overline{MA} // \overline{LB} \Rightarrow$ ML=4k y LC=k

$\overline{ME} // \overline{LF} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4k}{k}$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = 4$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 60



- Sea "b" el término intermedio de la P.A. de a, b y c $\Rightarrow$ $b=\frac{a+c}{2}$
- Nos piden r/h.
- Sea I el incentro del $\triangle ABC$, por teorema:

$$\Rightarrow \quad \frac{BI}{IM}=\frac{a+c}{b}=2$$

- $⊿MTI \sim ⊿MHB$

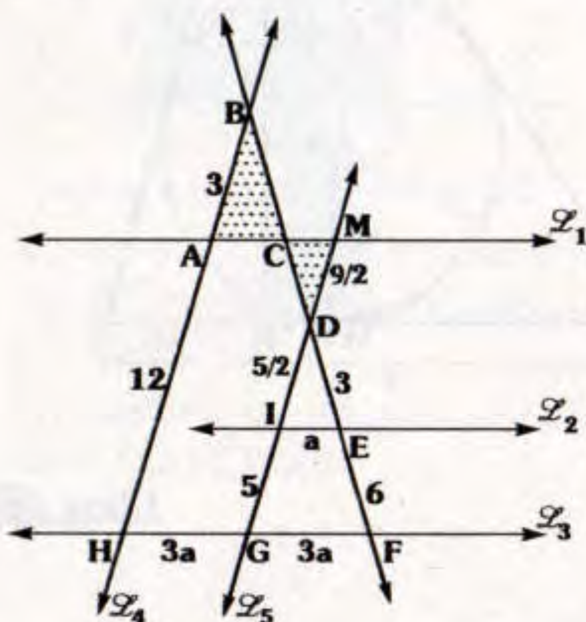
$$\Rightarrow \quad \frac{r}{h}=\frac{\ell}{3\ell}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{r}{h}=\frac{1}{3}}$$

Clave B



RESOLUCIÓN Nº 61



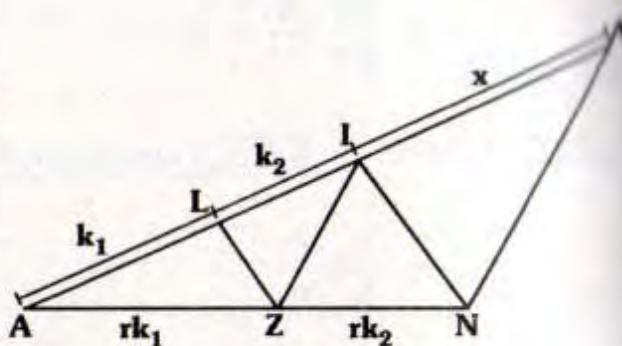
Nos piden CD–BC.

- $\Delta IDE \sim \Delta GDF \Rightarrow GF=3a$
- En ΔHBF, notemos que $\overline{GD}$ es su base media $\Rightarrow HB=15 \Rightarrow AH=12$.
- Como HAMG es paralelogramo $\Rightarrow DM=\dfrac{9}{2}$
- $\Delta ABC \sim \Delta MCD \Rightarrow BC=2m$ y $CD=3m$
- Como $BD=DF=9 \Rightarrow m=\dfrac{9}{5}$
- Finalmente:

$$CD-BC=3m-2m=\frac{9}{5}=\mathbf{1,8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 62



Piden x.

- Por teorema de Tales:

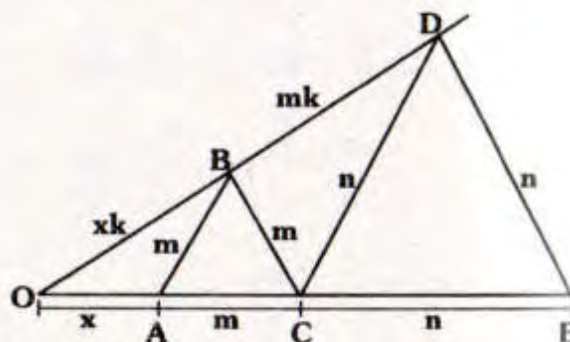
$\overline{LZ} // \overline{IN} \Rightarrow AZ=rk_1$ y $ZN=rK_2$

$\overline{ZI} // \overline{NA'} \Rightarrow \dfrac{x}{k_1+k_2}=\dfrac{k_2}{k_1}$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{k_2}{k_1}(k_1+k_2)}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 63



Nos piden x.

- Como los triángulos ABC y CDE son equiláteros:

$$\Rightarrow \quad \overline{AB}//\overline{CD} \text{ y } \overline{BC}//\overline{DE}$$

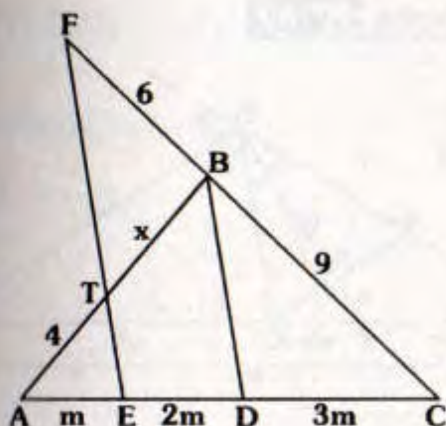
- Por teorema de Tales:

$OB=xk$, $BD=mk$ y $\dfrac{x+m}{n}=\dfrac{x}{m}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{m^2}{n-m}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 64



Piden x.

- Por teorema de Tales:

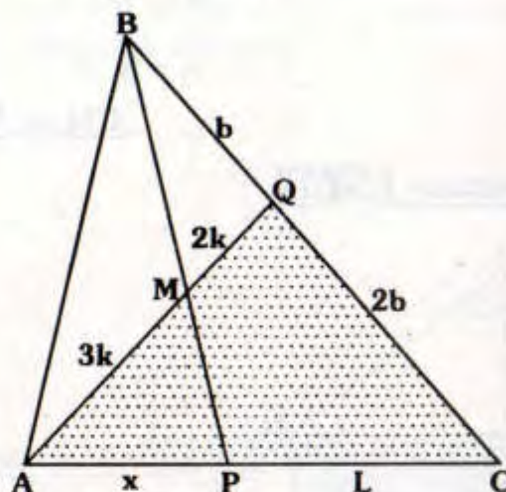
$$\Rightarrow \frac{ED}{DC}=\frac{6}{9} \Rightarrow ED=2m \text{ y } DC=3m$$

- Como $AD=DC \Rightarrow AE=m$
- Como $\overline{ET}//\overline{BD} \Rightarrow \dfrac{x}{4}=\dfrac{2\cancel{m}}{\cancel{m}}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 65



Piden x.

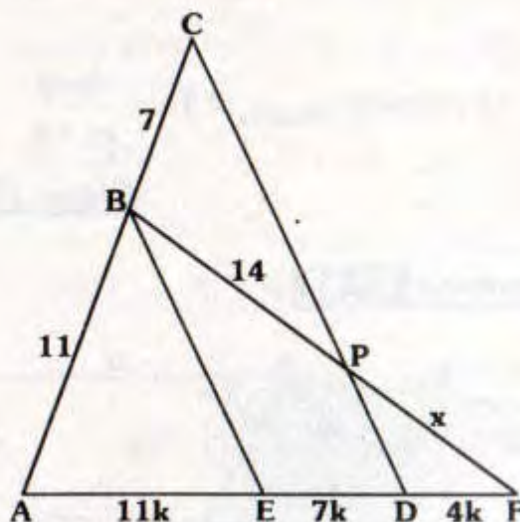
- Por teorema de Menelao en el $\triangle ABC$ ($\overleftrightarrow{PMB}$ es recta secante):

$$x(2k)(3b)=(3k)L(3b)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{L}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 66



Piden x.

- Por teorema de Tales:

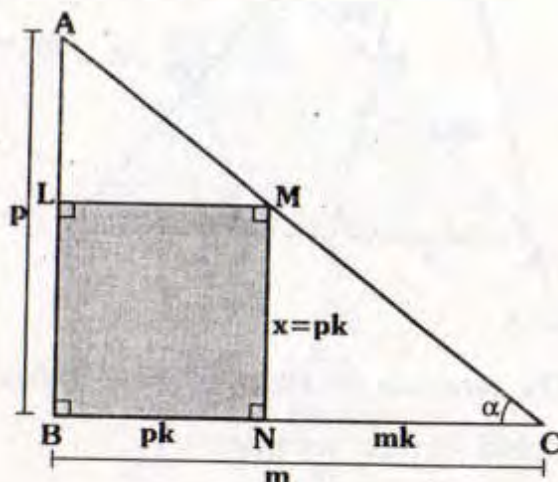
Como $\overline{BE}//\overline{CD} \Rightarrow AE=11k$ y $ED=7k$

Como $\overline{BE}//\overline{PD} \Rightarrow \dfrac{x}{14}=\dfrac{4k}{7k}$

$\therefore\ \mathbf{x=8}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 67



Nos piden el perímetro del cuadrado (BLMN)

- $\triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow NM=pk$ y $NC=mk$

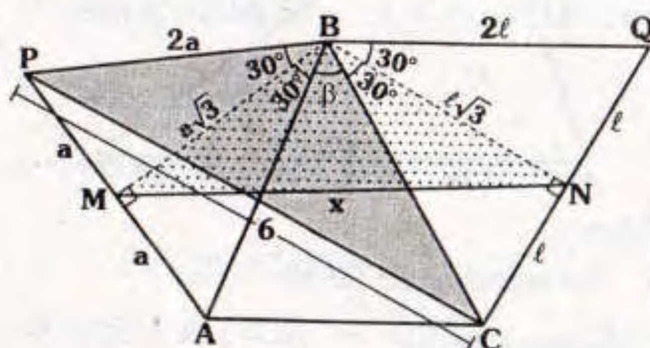
- $pk+mk=m \Rightarrow k=\dfrac{m}{p+m}$

$\Rightarrow x=\dfrac{mp}{m+p}$

$\therefore$ $\mathbf{Perímetro_{(BLMN)}=4x=\dfrac{4mp}{m+p}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 68



Piden MN

- Como $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ son medianas (*alturas y bisectrices*), entonces:

$m\measuredangle PBC = m\measuredangle MBN = 60° + \beta$

- También: $\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{a}{\ell}$

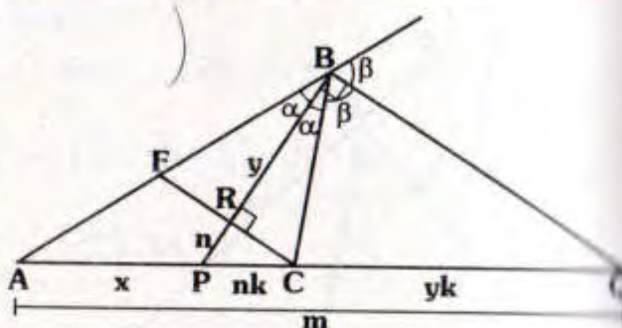
$\Rightarrow \Delta PBC \sim \Delta MBN$

$\Rightarrow \dfrac{x}{6}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2a}$

$\therefore\ \mathbf{x=3\sqrt{3}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 69



Nos piden **xy** en función de **m** y **n**.

- Por teorema de Tales:

$$\frac{BR}{RP}=\frac{CQ}{PC}=\frac{y}{n}$$

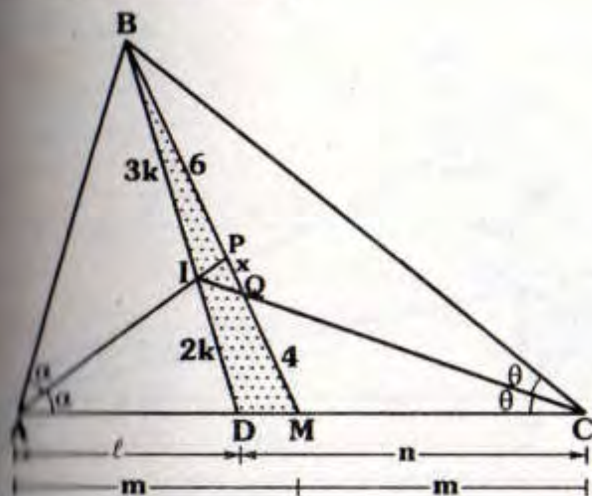
- A, P, C y Q: cuaterna armónica

- Como $\overline{ET}//\overline{BD} \Rightarrow \dfrac{x}{n\cancel{k}}=\dfrac{m}{y\cancel{k}}$

$\therefore\ \mathbf{xy=mn}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 70



Piden x.

- Por teorema de Menelao, en el △DBM:

$$\ell(3k)(x+4)=6(2k)m \Rightarrow \frac{\ell}{m}=\frac{4}{x+4} \quad ...(I)$$

$$m(x+6)(2k)=(3k)(4)n \Rightarrow \frac{n}{m}=\frac{x+6}{6} \quad ...(II)$$

- De (I) y (II):

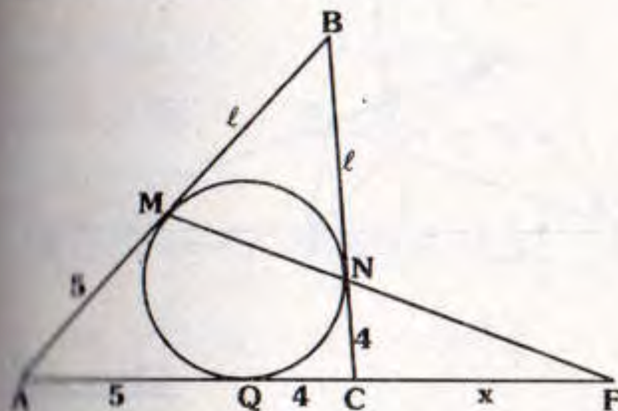
$$\underbrace{\frac{\ell}{m}+\frac{n}{m}}=\frac{4}{x+4}+\frac{x+6}{6}$$

$$2=\frac{4}{x+4}+\frac{x+6}{6}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 71



Piden x.

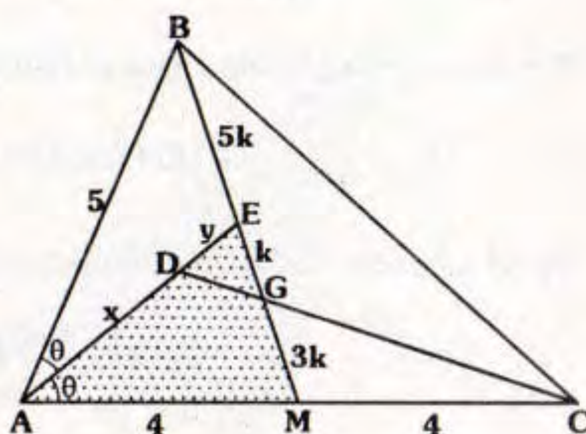
- Como A, Q, C y F forman una cuaterna armónica, entonces

$$\frac{x}{4}=\frac{9+x}{5}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=36}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 72



Piden x/y.

- Como G es baricentro del △ABC, entonces: GB=2(GM)
- Sea GM=3k ⇒ BG=6k
- Como $\overline{AE}$ es bisectriz interior del △ABM ⇒ BE=5k y EM=4k
- Teorema de Menelao en el △AEM:

$$x(k)(4)=y(3k)(8)$$

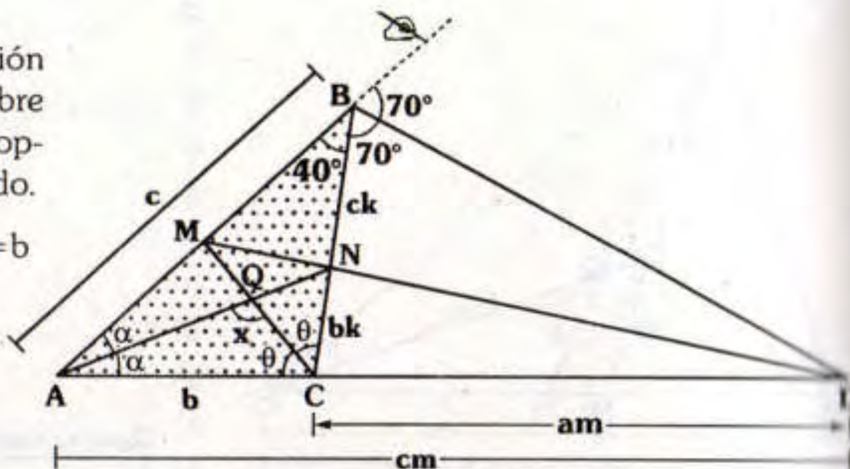
$$\therefore \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\mathbf{6}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 73

- Nos piden x.
- Se podría usar la observación dada en las propiedades sobre cuaternas armónicas, pero optemos por el siguiente método.
- Sea: AB=c; BC=a y AC=b
- Por teorema de la bisectriz (*interior y exterior*):

$$\frac{BN}{NC}=\frac{c}{b} \text{ y } \frac{AD}{CD}=\frac{c}{a}$$



- Por teorema de Menelao para el $\triangle ABC$:

$$(AM)(ck)(am)=(BM)(bk)(cm) \Rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{b}{a}$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz interior: $\overline{CM}$ es bisectriz.

$$x=90°+\frac{m\sphericalangle ABC}{2} \qquad \therefore \ \mathbf{x=110°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 74

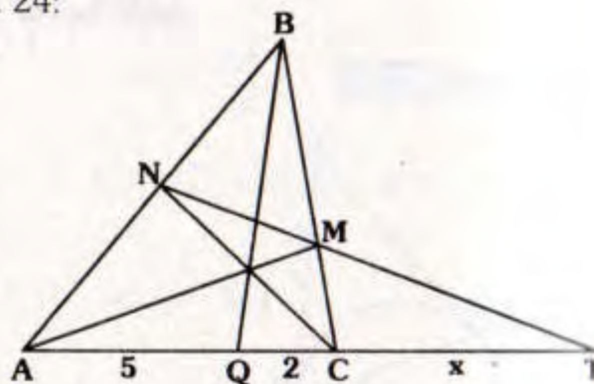
Piden x.

- Es aplicación directa del teorema de la pág. 24:

(A, Q, C y T: *cuaterna armónica*)

$$\frac{x}{2}=\frac{7+x}{5}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{14}{3}}$$



Clave C

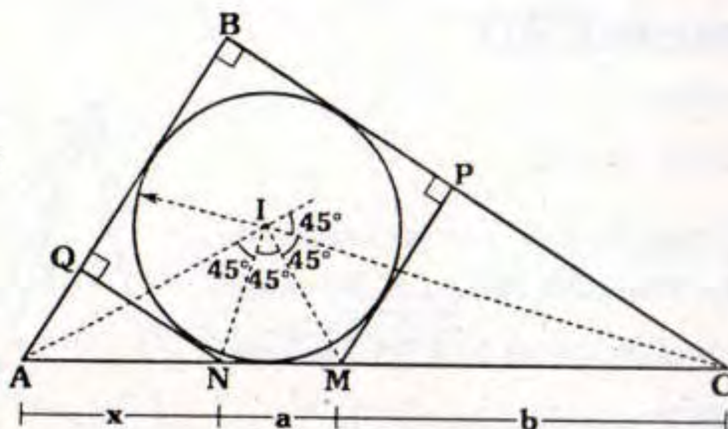
RESOLUCIÓN Nº 75

Nos piden x.

- Como A, N, M y C es una cuaterna armónica

$$\Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{x+a+b}{b}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{a(a+b)}{b-a}}$$



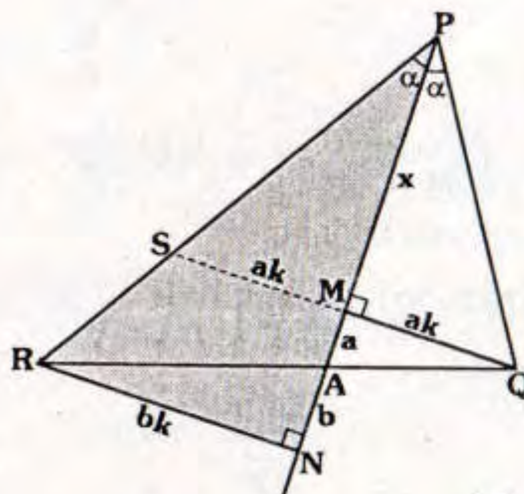
Clave A

RESOLUCIÓN Nº 76

Nos piden x.

- ⊿RNA∼⊿QMA ⇒ RN=bk y MQ=ak
- △SPQ: isósceles ⇒ SM=MQ=ak
- ⊿RNP∼⊿SMP ⇒ $\frac{x}{ak}=\frac{x+a+b}{bk}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{a(a+b)}{b-a}}$$



Clave C

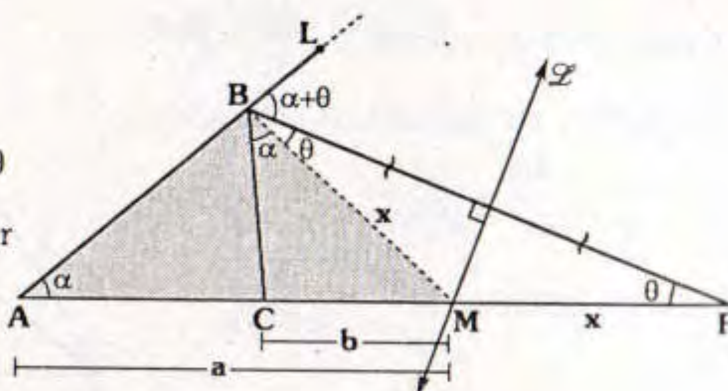
RESOLUCIÓN Nº 77

Nos piden x.

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz

  ⇒ m∢MBF=m∢MFB=θ
- Sea m∢BAM = α ⇒ m∢LBF = α + θ
- Como $\overline{BF}$ es bisectriz exterior ⇒m∢CBM=α
- En △ABM: propiedad de semejanza

$$\Rightarrow x^2=\underbrace{ba}_{16} \qquad \therefore \quad \mathbf{x=4}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 78

Nos piden x.

- Dato: z+y=15
- Como G_1 y G_2 son baricentros de los triángulos ABD y ACD, entonces al prolongar $\overline{BG_1}$ y $\overline{CG_2}$ llegarán al punto medio de $\overline{AD}$.
- Como $\frac{BG_1}{G_1M}=\frac{CG_2}{G_2M}=2 \Rightarrow \overline{G_1G_2}//\overline{BC}$ y al prolongar $\overline{MG}$, llegará al punto medio de $\overline{BC}$ y NL=2(LM).
- Como NG=2(GL) ⇒ NG=GM ⇒ ME=NF= ℓ.
- Finalmente:

$$\ell=\frac{8+x}{2}=\frac{z+y}{2} \qquad \therefore \quad \mathbf{x=7}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 79

Piden x.

- Como ⊿ANB ~ ⊿CQB ⇒ $\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}$
- En △ABC, por teorema de la bisectriz:

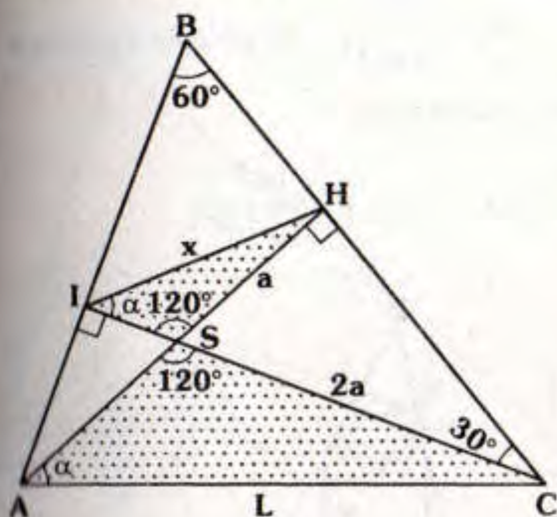
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MC}$$

- ⊿ANC ~ ⊿MHC ⇒ $\frac{x}{a}=\frac{bk}{(a+b)k}$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{ab}{a+b}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 80



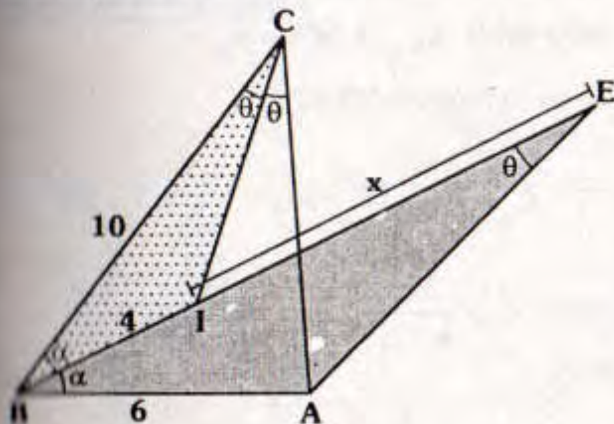
Piden x.

- ⊿SHC: notable de 30° y 60° ⇒ HS=a y SC=2a
- △ASC~△ISH ⇒ $\frac{x}{L}=\frac{a}{2a}$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{L}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 81



Nos piden x.

- Como I es incentro

⇒ m∢CBI = m∢IBA = α y

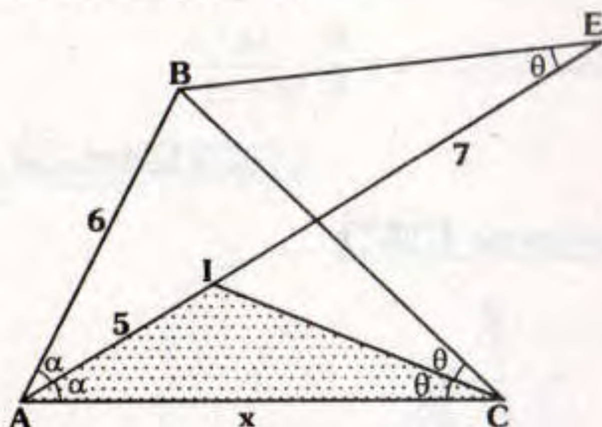
m∢BCI = m∢ICA = θ

- **E** es excentro ⇒ m∢BEA = θ
- △BIC~△BAE ⇒ $\frac{x+4}{10}=\frac{6}{4}$

$$\therefore\ \mathbf{x=11}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 82



Nos piden x.

- Como **E** es excentro del △ABC

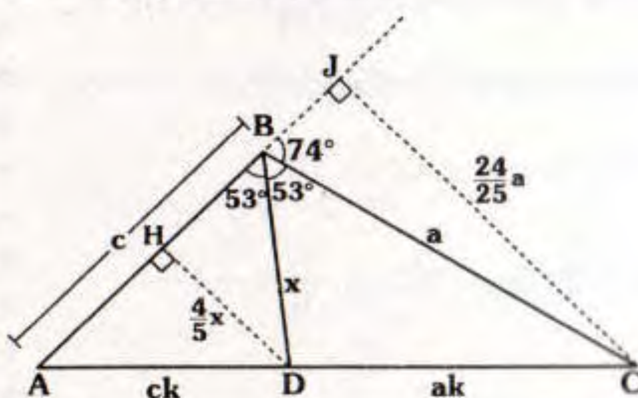
⇒ $m∢AEB=\frac{m∢ACB}{2}=\theta$

- △ABE~△AIC ⇒ $\frac{x}{12}=\frac{5}{6}$

$$\therefore\ \mathbf{x=10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 83



Piden x.

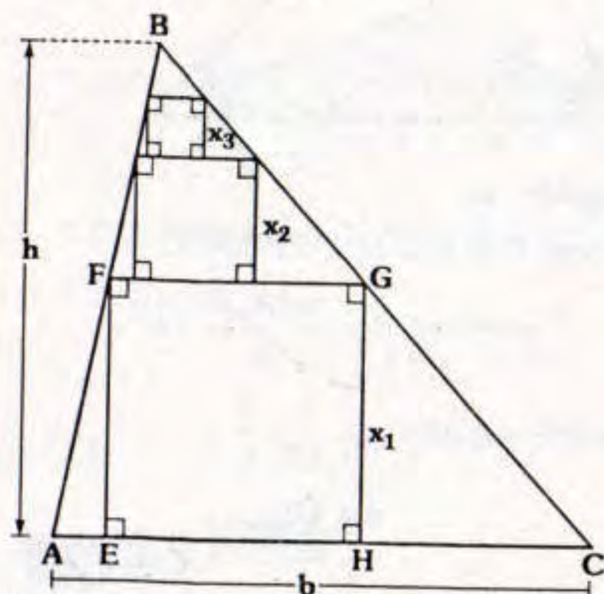
- Por teorema de la bisectriz AD=ck y DC=ak
- $\measuredangle$AHD~$\measuredangle$AJC

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{4x}{5}\right)}{\left(\frac{24}{25}a\right)}=\frac{c\not{k}}{(a+c)\not{k}}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{6}{5}\cdot\frac{ac}{(a+c)}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 84



Por demostrar: $x_n=\dfrac{bh^n}{(b+h)^n}$

Procedamos por inducción:

- Probemos $x_1=\dfrac{bh}{b+h}$
- $\triangle ABC \sim \triangle FBG \Rightarrow \dfrac{x_1}{b}=\dfrac{h-x_1}{h}$

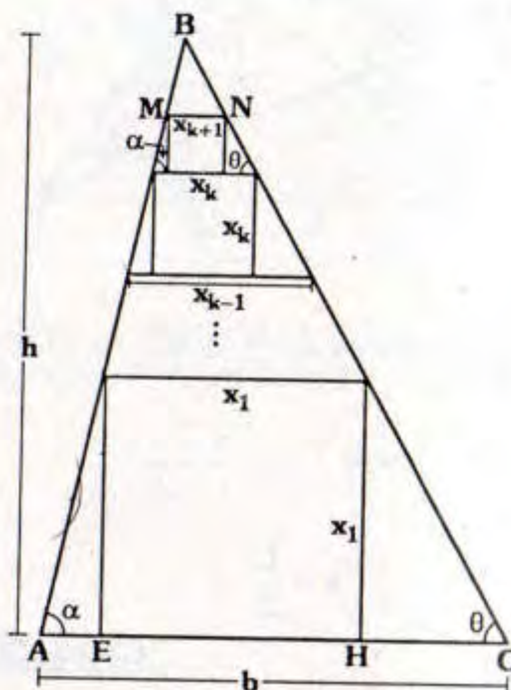
$$\therefore\ x_1=\frac{bh}{b+h}$$

- Supongamos que es válido:

$$x_k=\frac{bh^k}{(b+h)^k}\ \text{... Hipótesis inductiva}$$

- Por demostrar:

$$x_{k+1}=\frac{bh^{k+1}}{(b+h)^{k+1}}$$



- En el $\triangle ABC$ está inscrito el cuadrado cuyo lado mide x_{k+1} y $MN=x_k$.
- Como $\triangle MBN \sim \triangle ABC$

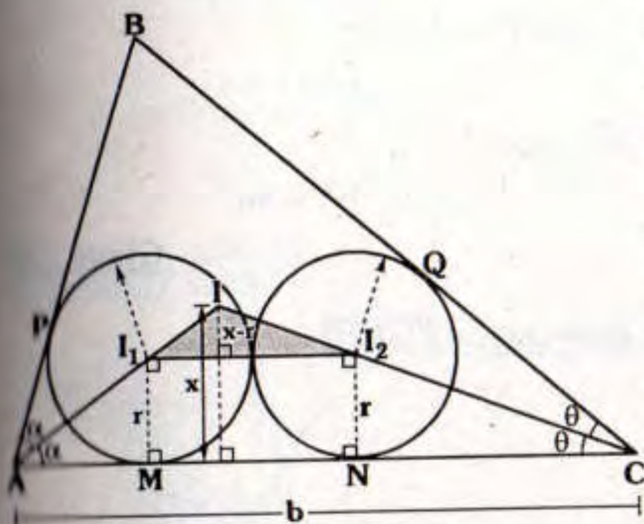
$$\Rightarrow \frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{x_1}{b}\Rightarrow x_{k+1}=\frac{x_1x_k}{b}\quad ...(I)$$

- Como $x_1=\dfrac{bh}{b+h}$ y $x_k=\dfrac{bh^k}{(b+h)^k}$
- En (I):

$$x_{k+1}=\frac{1}{\not{b}}\cdot\frac{\not{b}h}{(b+h)}\cdot\frac{bh^k}{(b+h)^k}$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{k+1}=\frac{bh^{k+1}}{(b+h)^{k+1}}}$$

RESOLUCIÓN Nº 85



Piden el inradio (x) del $\triangle$ABC.

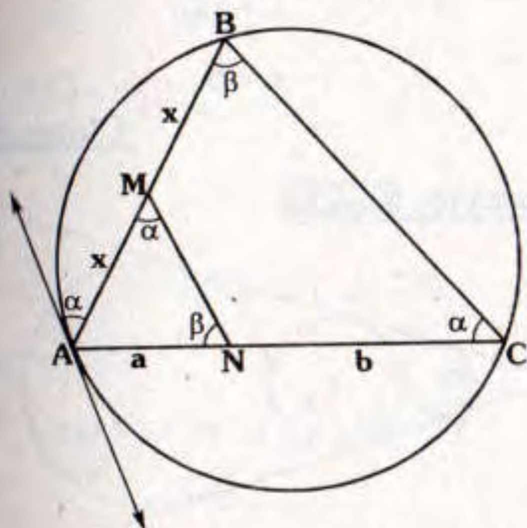
$\triangle I_1II_2 \sim \triangle AIC$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-r}=\frac{b}{2r}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{br}{b-2r}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 86



Piden AB.

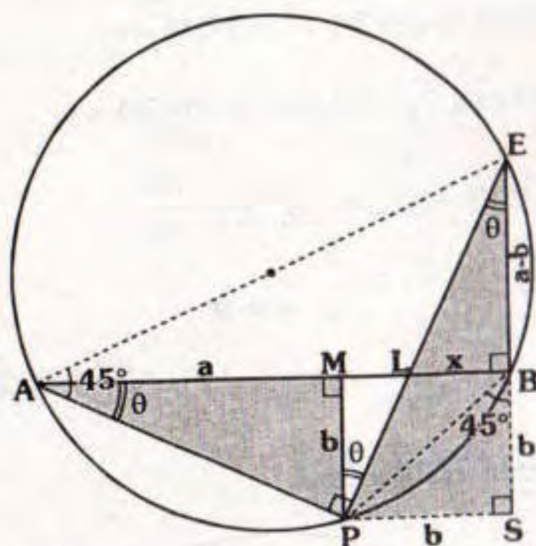
- Como M es punto medio de $\overline{AB}$
  $\Rightarrow$ AM=MB=x, luego AB=2x.
- $\triangle AMN \sim \triangle ACB$:

$$\Rightarrow \frac{x}{a+b}=\frac{a}{2x} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}$$

$$\therefore \ \mathbf{AB=\sqrt{2a(a+b)}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 87



Piden LB.

- Por ángulo inscrito:

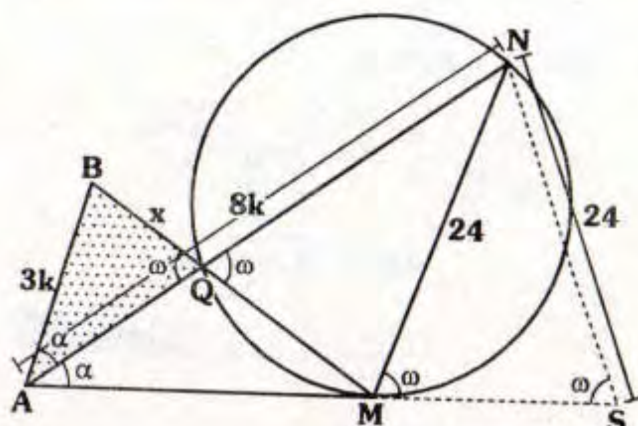
$$m\measuredangle PAB = m\measuredangle PEB = \theta$$

- $\triangle AMP \sim \triangle ESP \Rightarrow PS=b$
- $\triangle LBE \sim \triangle PSE \Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{a-b}{a}$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{b}{a}(a-b)}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 88



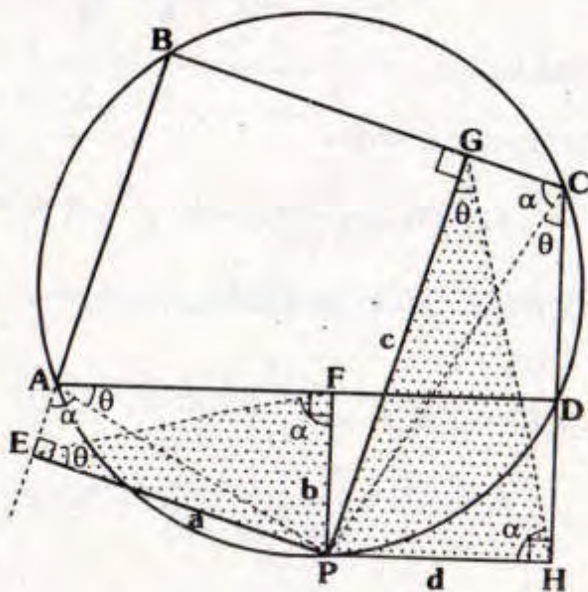
Nos piden x.

- Como m∢NQM = m∢NMS = ω
- Se traza $\overline{NS}$ tal que m∢NSM = ω
- △AQB~△ASN ⇒ $\frac{x}{24}=\frac{3k}{8k}$

$\therefore$ **x = 9**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 89



Sea $ad=8u^2$

- Nos piden bc.
  - Al completar ángulos, notamos:

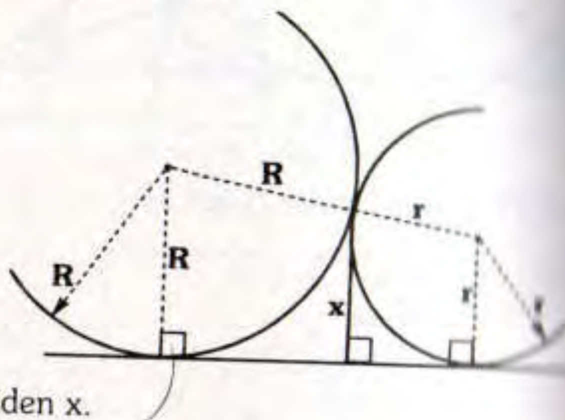
△EFP~△GHP

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Rightarrow ad=bc$$

$\therefore$ **bc = 8u²**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 90



Piden x.

- Por propiedad de semejanza.

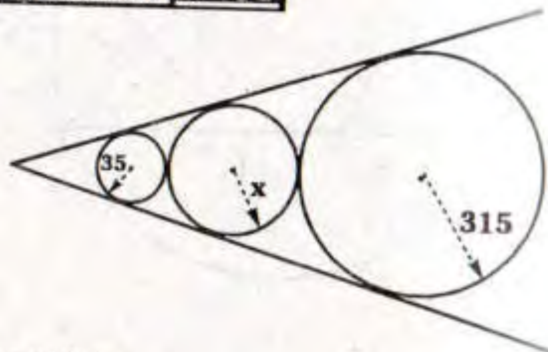
$$x=\frac{Rr+rR}{R+r} \Rightarrow \frac{2}{x}=\underbrace{\frac{1}{R}+\frac{1}{r}}_{0,25}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ **x = 8**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 91



Nos piden x.

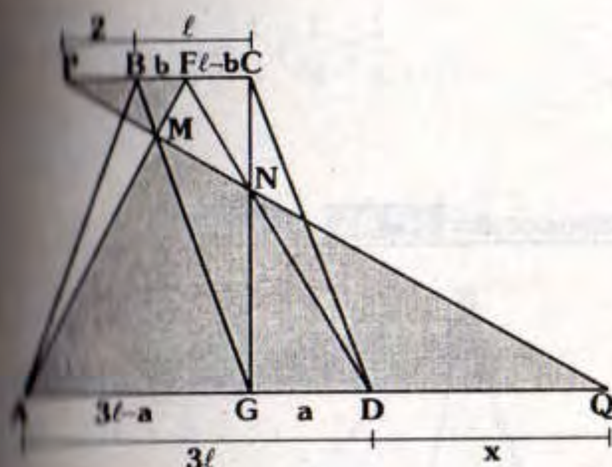
• Por propiedad:

$$x^2=(35)(315)$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=105}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 92



Piden x.

• $\triangle PMF \sim \triangle QMA$

$$\frac{x+a}{3\ell-a}=\frac{2}{b} \Rightarrow \frac{x+a}{3\ell+x}=\frac{2}{b+2}$$

$$\Rightarrow (x+a)(b+2)=2(3\ell+x) \quad ...(I)$$

• $\triangle GNQ \sim \triangle CNP$

$$\frac{b+2}{\ell-b}=\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{b+2}{\ell+2}=\frac{x}{x+a}$$

$$\Rightarrow (x+a)(b+2)=x(\ell+2) \quad ...(II)$$

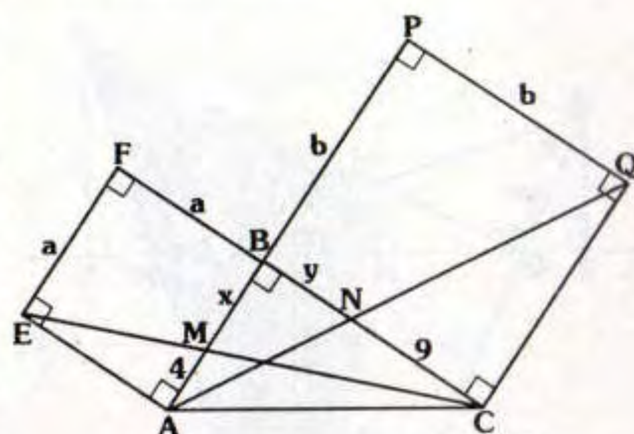
• De (I) y (II):

$$\Rightarrow 2(3\ell+x)=x(\ell+2)$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 93



Nos piden AB.

Notemos:

• $⊿EFC \sim ⊿MBC \Rightarrow \dfrac{x}{b}=\dfrac{a}{a+b}$

$$\Rightarrow x=\frac{ab}{a+b} \quad ...(I)$$

• $⊿ABN \sim ⊿APQ \Rightarrow \dfrac{y}{a}=\dfrac{b}{a+b}$

$$\Rightarrow y=\frac{ab}{a+b} \quad ...(II)$$

• Luego deducimos: $x=y$

• $⊿EAM \sim ⊿CBM \Rightarrow \dfrac{4}{x}=\dfrac{a}{b}$

• $⊿NBA \sim ⊿NCQ \Rightarrow \dfrac{x}{9}=\dfrac{a}{b}$

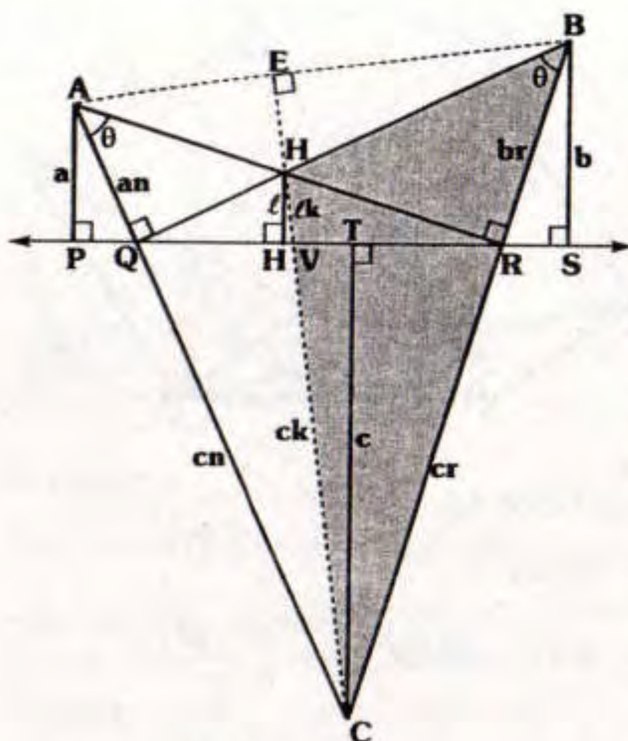
$$\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$$

$$\Rightarrow x=6$$

$$\therefore\quad \mathbf{AB=10}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 94



Por demostrar: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\ell}$

- Notamos que H es ortocentro del ΔABC.
- $\measuredangle$PAQ ~ $\measuredangle$TCQ $\Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{a}{n}$
- $\measuredangle$HUV ~ $\measuredangle$CTV $\Rightarrow \frac{HV}{VC}=\frac{\ell}{c}$
- $\measuredangle$CTR ~ $\measuredangle$BSR $\Rightarrow \frac{BR}{RC}=\frac{b}{c}$
- En ΔABC: Por teorema de Van Aubel

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{CH}{HE}$$

- Como C, V, H y E forman una cuaterna armónica

$$\Rightarrow \frac{c}{\ell}=\frac{CE}{HE}=\frac{CH+HE}{HE}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\ell}=\frac{CH}{HE}+1$$

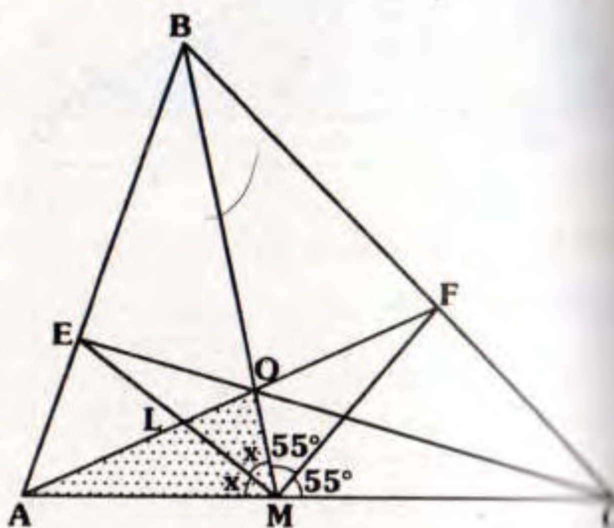
$$\Rightarrow \frac{c-\ell}{\ell}=\frac{CH}{HE}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{c-\ell}{\ell} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{c-\ell}{\ell c}$$

$$\frac{1}{\ell}-\frac{1}{c}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\ell}}$$

RESOLUCIÓN Nº 95



Nos piden x.

- Como A, L, O y F es cuaterna armónica y $\overline{MF}$ es bisectriz del m$\measuredangle$OMC $\Rightarrow$ de las observaciones de las páginas 53 y 54, $\overline{ML}$ es bisectriz del m$\measuredangle$OMA

$$\Rightarrow 2(x+55°)=180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=35°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 96

Nos piden x.

- $\triangle MOE \sim \triangle SFO$

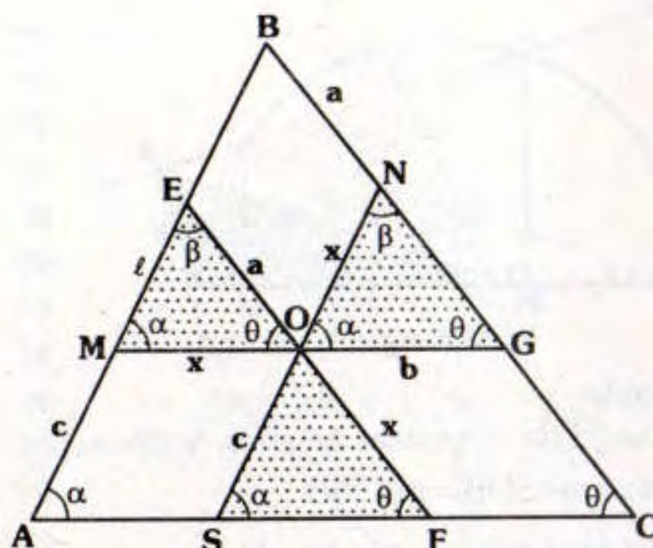
$$\Rightarrow \frac{\ell}{c}=\frac{a}{x} \Rightarrow \ell=\frac{ac}{x} \qquad ...(I)$$

- $\triangle MOE \sim \triangle OGN$

$$\Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{\ell}{x} \Rightarrow x^2=b\ell \qquad ...(II)$$

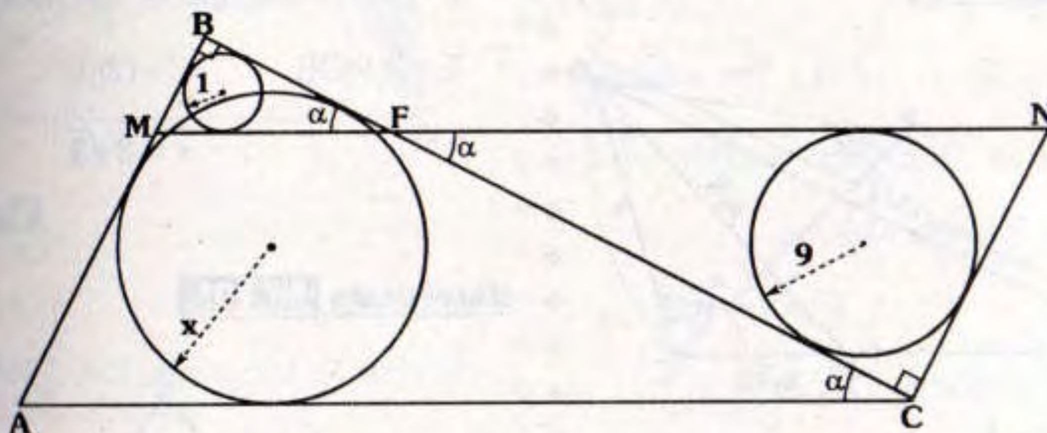
- De (I) y (II):

$$\therefore \; \mathbf{x=\sqrt[3]{abc}}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 97



Piden x.

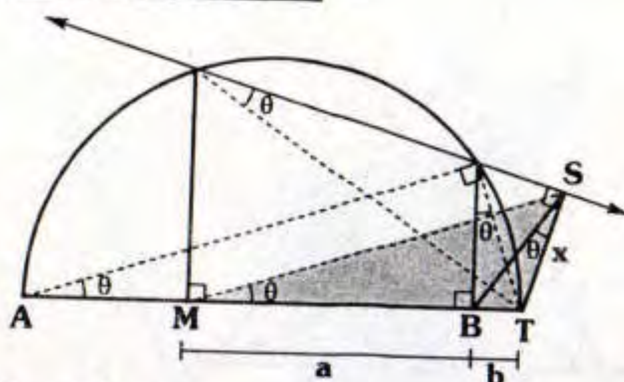
- Notemos que AMNC es un paralelogramo $\Rightarrow$ AC=MN
- $⊿ABC \sim ⊿MBF \sim ⊿FCN$

$$\Rightarrow \frac{x}{AC}=\frac{1}{MF}=\frac{9}{FN}=\frac{1+9}{MF+FN} \qquad \Rightarrow \frac{x}{AC}=\frac{10}{MN}$$

$$\therefore \; \mathbf{x=10}$$

Clave C

Resolución N° 98



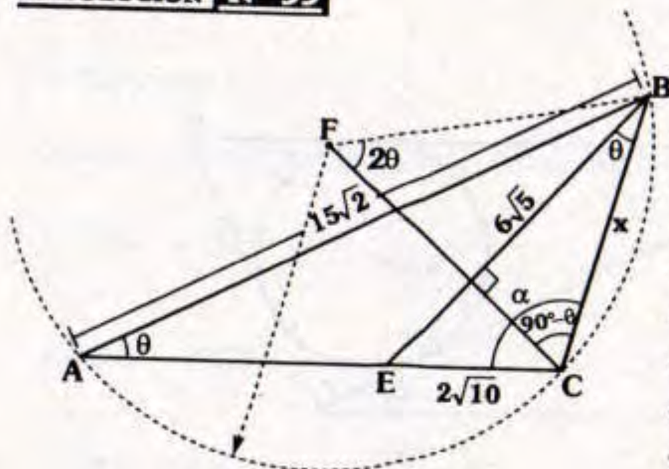
Nos piden x.

- Luego de completar ángulos, verificamos: m∢SMB = m∢TSB
- Por propiedad: $x^2 = b(a+b)$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{b(a+b)}}$$

Clave A

Resolución N° 99



Piden x.

- Como F es circuncentro del ΔABC

$\Rightarrow$ m∢BFC = 2(m∢BAC) = 2θ

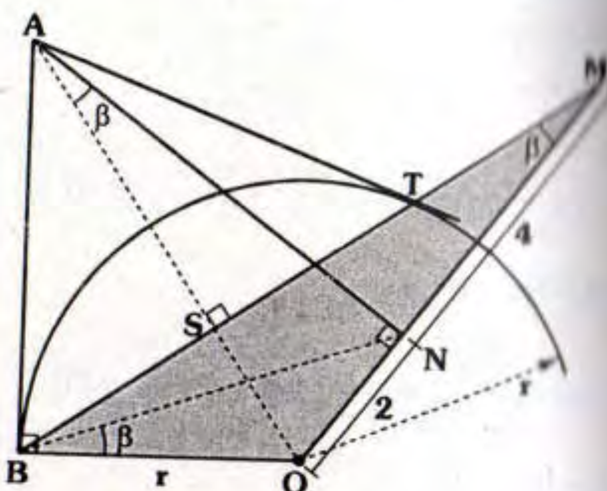
$\Rightarrow$ m∢EBC = θ

- ΔEBC~ΔBAC $\Rightarrow \dfrac{x}{2\sqrt{10}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{6\sqrt{5}}$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 10}$$

Clave D

Resolución N° 100



Piden r.

- Como $\overline{BT} \perp \overline{AO}$

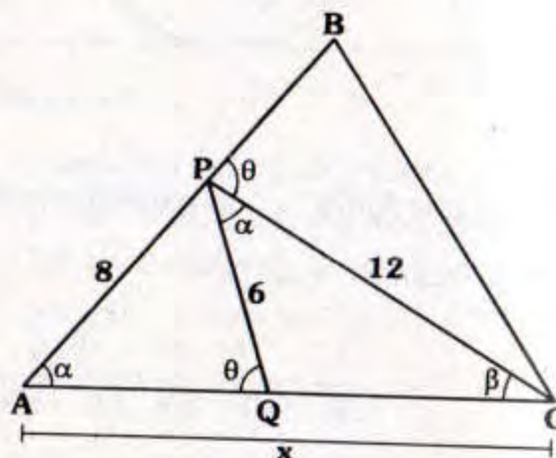
$\Rightarrow$ m∢OMB = m∢NAS = β

- ⌂BANO: inscriptible $\Rightarrow$ m∢OBN = β
- En ΔMOB: $r^2 = (2)(6)$

$$\therefore \quad \mathbf{r = 2\sqrt{3}}$$

Clave C

Resolución N° 101



Nos piden x.

- Nos damos cuenta que: ΔACP~ΔPCQ

$$\Rightarrow \frac{x}{12}=\frac{8}{6}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=16}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 102

Nos piden x.
Dato BD=5

- En $\triangle ABC$, por propiedad de semejanza:

$$a^2=(MC)2a \Rightarrow MC=\frac{a}{2}$$

- Se traza la bisectriz $\overline{BN}$ del $\triangle ABM \Rightarrow BA=NC=a$
- $\triangle ANB \cong \triangle CBD(ALA)$

$$\therefore \ \mathbf{x=5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 103

Piden AC.

- Se traza $\overline{MT} \perp \overline{NH}$ (T en $\overline{NH}$) y $\overline{NS} // \overline{AC}$
- En el trapecio SNHA, $\overline{MT}$ es base media

$$\Rightarrow AM=MS=a \text{ y } SB=a$$

- $\triangle SBN \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow AC=3(SN)=6n$$

- En SNHA:

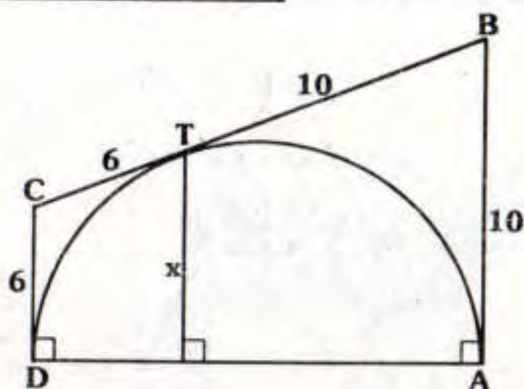
$$\Rightarrow 2=\frac{4n+2n}{2}$$

$$\Rightarrow n=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \ \mathbf{AC=6\left(\frac{2}{3}\right)=4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 104



Nos piden x.

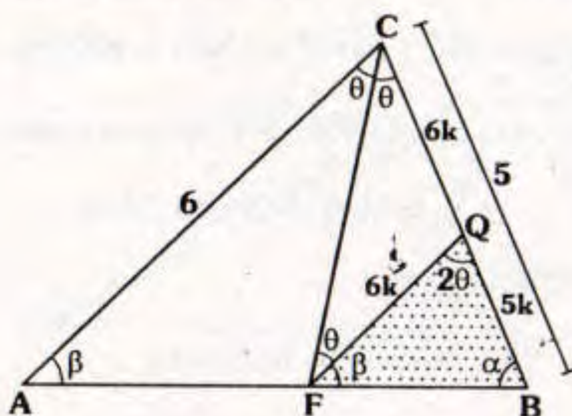
- En el trapecio ABCD, por propiedad:

$$\Rightarrow x=\frac{6\times10+10\times6}{6+10}$$

$$\therefore \mathbf{x=7,5}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 105



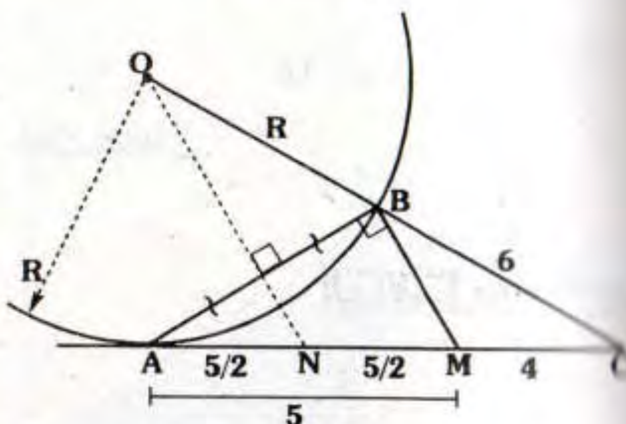
Nos piden BQ.

- $\Delta FQB \sim \Delta ACB \Rightarrow FQ=6k$ y $QB=5k$
- Como ΔFQC es isósceles $\Rightarrow FQ=CQ=6k$
- $5k+6k=5 \rightarrow k=\frac{5}{11}$

$$\therefore \mathbf{BQ=5k=\frac{25}{11}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 106



Piden R.

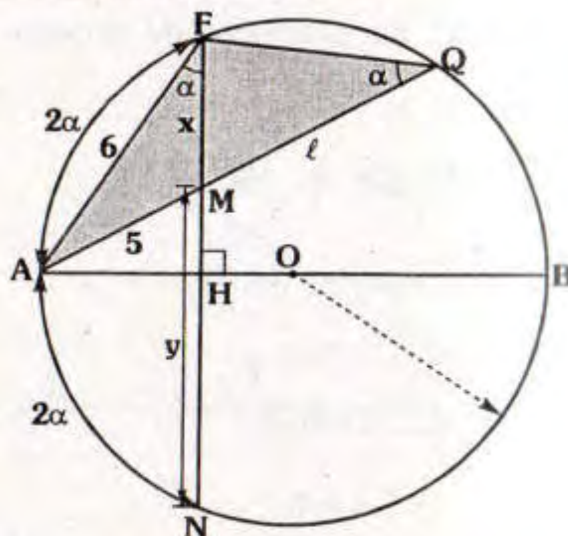
- Se traza la mediatriz de $\overline{AB}$ hasta que corte a $\overline{AM}$ en N $\Rightarrow AN=NM=\frac{5}{2}$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{R}{6}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{4}$$

$$\therefore \mathbf{x=\frac{15}{4}=3,75u}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 107



Piden xy.

- En $\triangle AFQ$:

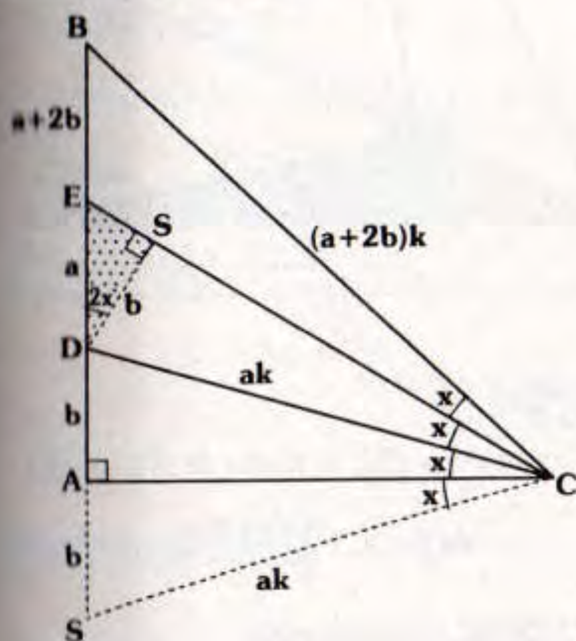
$$6^2=5(5+\ell) \Rightarrow \ell=\frac{11}{5}$$

- Como $xy=5\ell$

$$\therefore \ \mathbf{xy = 11u^2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 108



Nos piden x.

- Por teorema de la bisectriz en el $\triangle SCB$:

$$\frac{a\cancel{k}}{(a+2b)\cancel{k}}=\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}(a+b)} \Rightarrow a=b\sqrt{2}$$

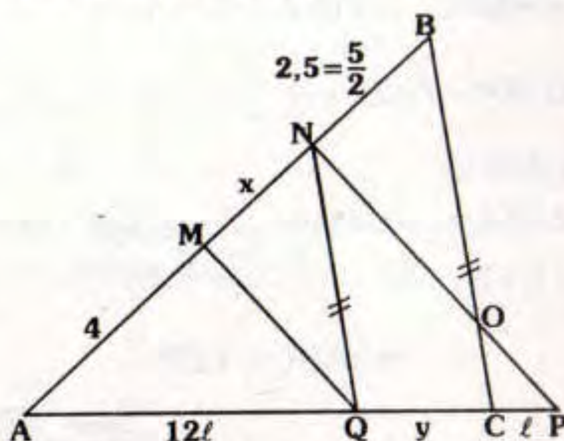
- En $\triangle DSE$:

$$2x=45°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 22,5°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 109



Nos piden OP/ON.

- Por teorema de Tales: $\dfrac{OP}{ON}=\dfrac{\ell}{y}$
- Como:

$$\frac{x}{4}=\frac{y+\ell}{12\ell} \Rightarrow x=\frac{y+\ell}{3\ell} \quad \text{...(I)}$$

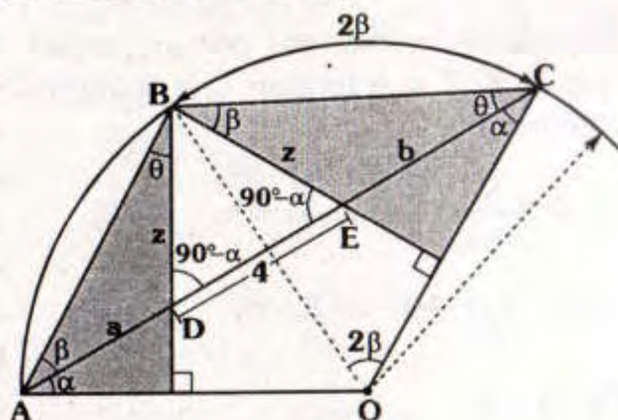
$$\frac{2y}{5}=\frac{12\ell}{4+x} \Rightarrow y(4+x)=30\ell \quad \text{...(II)}$$

- De (I) y (II): $y=5\ell$ y $x=2\ell$

$$\therefore \ \frac{\mathbf{OP}}{\mathbf{ON}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 110



Nos piden $m\sphericalangle ABC$.

Dato: $ab=16u^2$ y $DE=4u$

- Verificamos fácilmente que

  m∢BDC = m∢BEA = 90° − α y

  $\triangle ADB \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{z}{b}=\frac{a}{z} \Rightarrow z^2=ab$

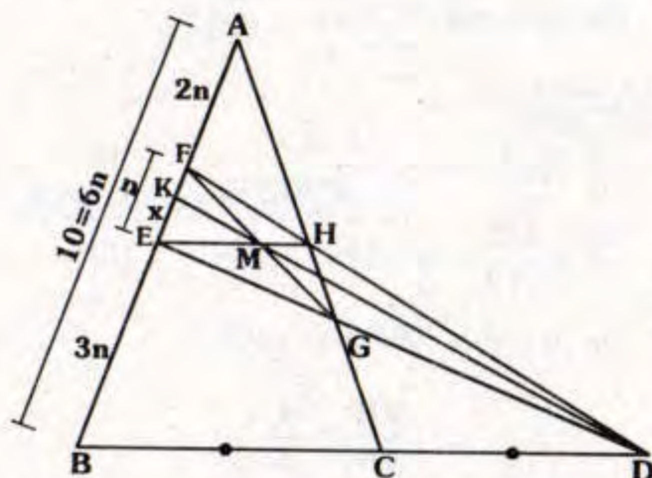
  $\Rightarrow z=4$

- ΔDBE es equilátero ⇒ m∢DBE = 60° y θ + β = 60°

∴ **m∢ABC = 120°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 111



Nos piden x.

- Sea AB=6n ⇒ BE=EA=3n y EF=n
- En ΔEFD, verificamos por propiedad que E, K, F y A forman una cuaterna armónica.

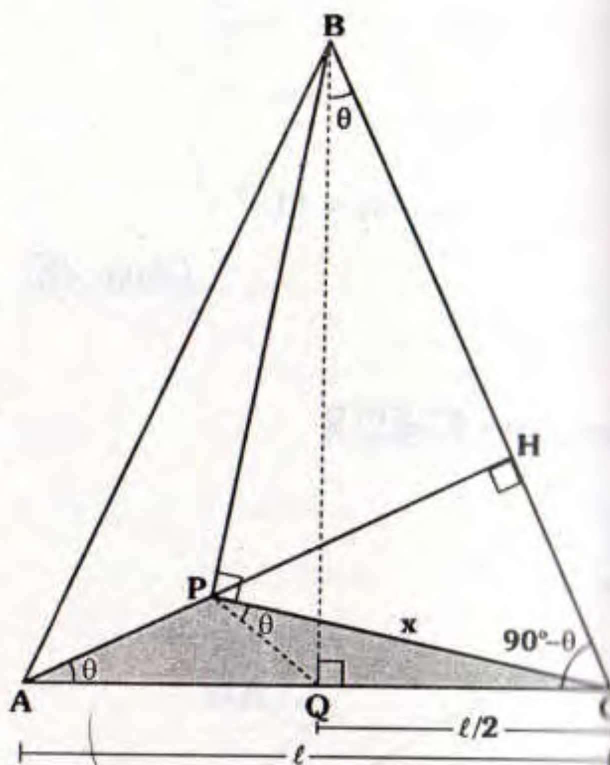
$$\Rightarrow \frac{x}{n-x}=\frac{3}{2} \Rightarrow 5x=3n \quad ...(I)$$

- Como $\underbrace{AB}_{6n}=10 \Rightarrow 3n=5 \quad ...(II)$
- De (I) y (II)

∴ **x = 1**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 112



Nos piden AC.

- Como AB=BC, al trazar la altura $\overline{BQ}$

$$\Rightarrow AQ=QC=\frac{\ell}{2}$$

- ⌂QPBC es inscriptible

$$\Rightarrow m\sphericalangle QPC = m\sphericalangle QBC = \theta$$

- En ΔAPC notamos que

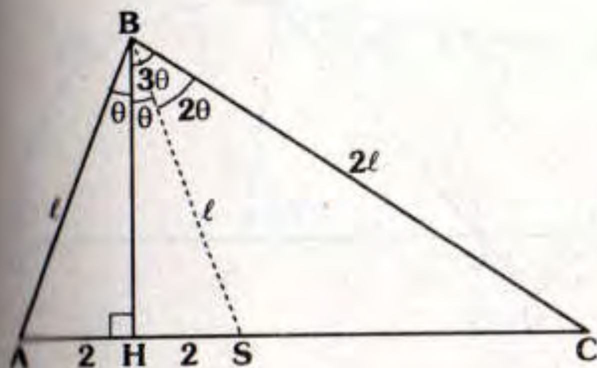
$$m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle QPC$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{\ell}{2}\cdot\ell$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 113



Nos piden AC.

- Sea AH=HS=2

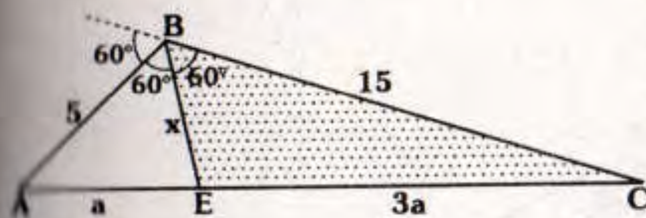
  $\Rightarrow$ m∢ABH = m∢HBS $\Rightarrow$ $\overline{BS}$ es bisectriz interior del $\triangle$ABC:

  $$\Rightarrow \frac{\ell}{2\ell}=\frac{4}{SC} \Rightarrow SC=8$$

  $$\therefore \ \mathbf{AC=12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 114



Nos piden x.

- Por teorema de la bisectriz interior en el $\triangle$ABC:

  $$EC=3(EA)$$

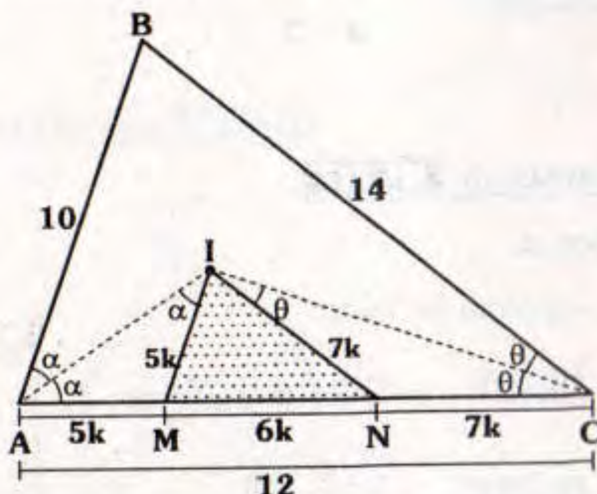
- Por teorema de la bisectriz exterior en el $\triangle$EBC:

  $$\Rightarrow \frac{x}{15}=\frac{a}{4a}$$

  $$\therefore \ \mathbf{x=\frac{15}{4}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 115



Nos piden MN.

- $\triangle ABC \sim \triangle MIN$

  $\Rightarrow$ MI=5k, IN=7k y MN=6k

- $\triangle$AMI y $\triangle$NIC: isósceles

  $\Rightarrow$ AM=MI y NC=NI=7k

- Luego:

  $$\underbrace{5k+6k+7k}_{18k}=12$$

  $$\Rightarrow \underbrace{6k}_{MN}=4$$

  $$\therefore \ \mathbf{MN=4}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 116

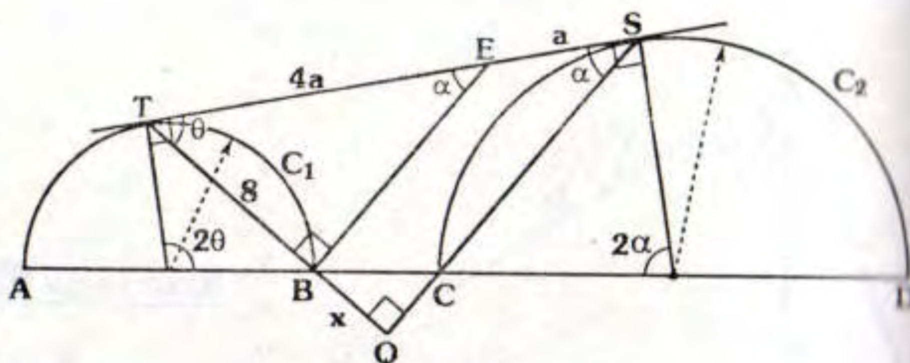
Nos piden x.

- Notemos que

$\alpha+\theta=90° \Rightarrow \overline{BE}//\overline{QS}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{8}=\dfrac{a}{4a}$

$\therefore \ \mathbf{x=2}$



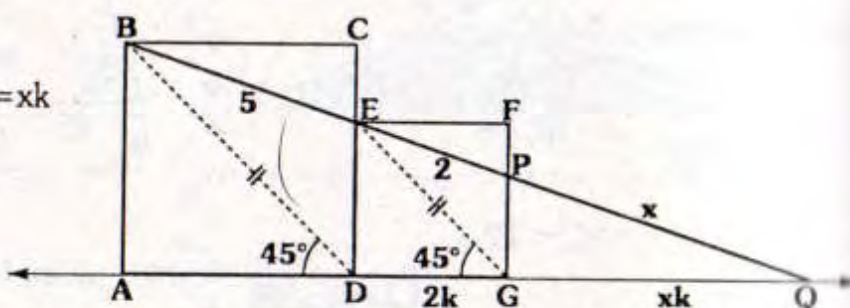
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 117

Piden x.

- Teorema de Tales:
- $\overline{DE}//\overline{GP} \Rightarrow DG=2k$ y $GQ=xk$
- $\overline{DB}//\overline{GE} \Rightarrow \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{x\cancel{k}}{2\cancel{k}}$

$\therefore \ \mathbf{x=\dfrac{4}{3}}$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 118

Piden $\dfrac{AH}{HC}$.

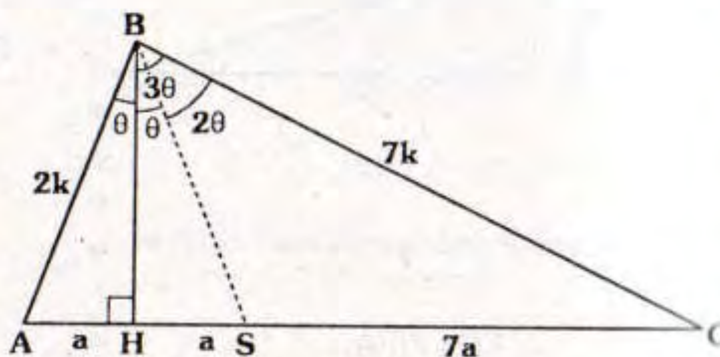
- Se traza $\overline{BS}$ tal que $m\measuredangle HBS=\theta$

$\Rightarrow AH=HS=a$

- Como $\overline{BS}$ es bisectriz en $\triangle ABC$

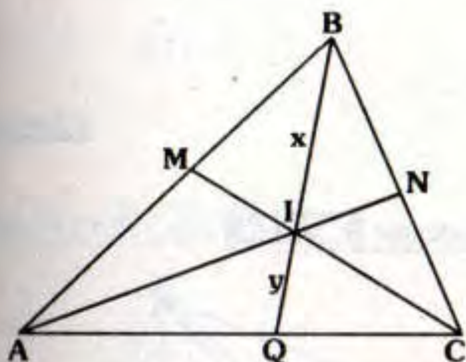
$\Rightarrow SC=7a$

$\therefore \ \mathbf{\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{1}{8}}$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 119



Piden x/y.

Dato: $\frac{MB}{MA}+\frac{BN}{NC}=\frac{3}{4}$

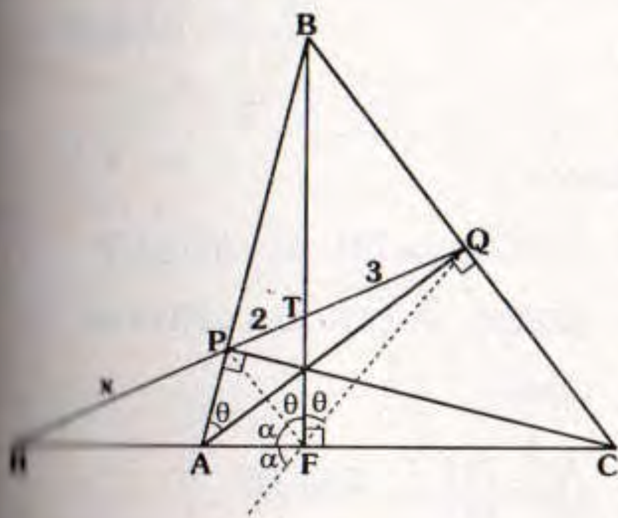
- Aplicación del teorema de Van Aubel:

$$\frac{x}{y}=\frac{MB}{MA}+\frac{BN}{NC}$$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{x}{y}=\frac{3}{4}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 120



Nos piden x.

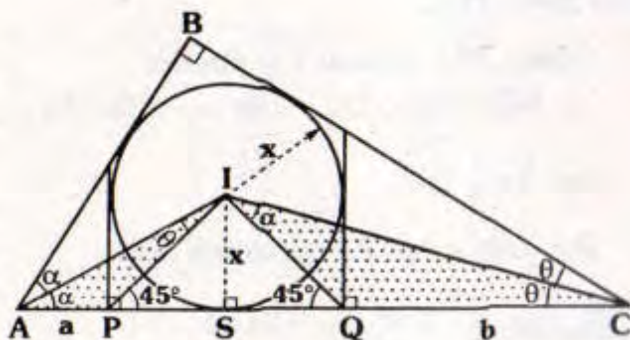
- Notamos que para el △FPQ:
  $\overline{FT}$ es bisectriz interior y $\overline{FR}$ es bisectriz exterior, luego R, P, T y Q forman una cuaterna armónica:

$$\frac{x}{2}=\frac{x+5}{3}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 121



Nos piden **r**.

Dato: ab=72

- Sea m∢AIP = θ y m∢BAI = m∢IAC = α

$$\Rightarrow\ \alpha+\theta=45^\circ \text{ luego } m\measuredangle ACB=2\theta$$

- ⊿PSI y ⊿ISQ: notables de 45°

$$\Rightarrow IP=IQ=x\sqrt{2}$$

- △AIP~△ICQ

$$\Rightarrow\ \frac{x\sqrt{2}}{a}=\frac{b}{x\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=6}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 122

Nos piden PQ.

- Como $\overline{AQ}$ es bisectriz interior
  $\Rightarrow$ BQ=13k y QC=15k $\Rightarrow$ 28k=14
  $\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$
- Por propiedad de circunferencia:

$$\ell=\underbrace{P_{\Delta ABC}}_{21}-15=6$$

- PQ=13k – 6

$$\therefore \quad \mathbf{PQ=\frac{1}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 123

Piden x.

- Es aplicación del teorema (*pág. 27*)

$$3x=(9)(4)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 124

Piden x.

- $\overline{AB}//\overline{CQ}$ $\Rightarrow$ BM=ak y MS=17k
- $\overline{BS}//\overline{CD}$ $\Rightarrow$ CH=17m y HD=am
- Como

$$\frac{AM}{MC}=\frac{DH}{HC} \Rightarrow \overline{MH}//\overline{AD}$$

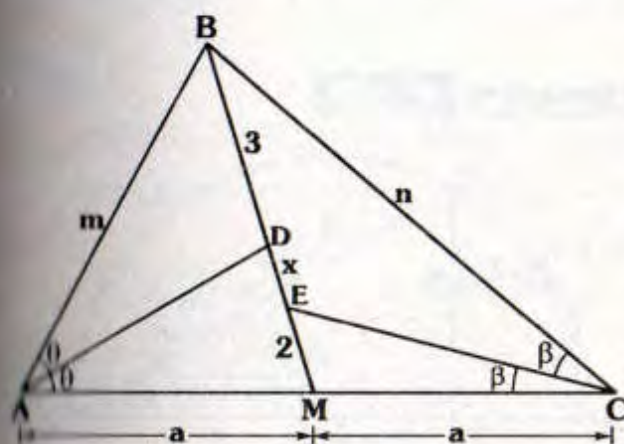
$$\Rightarrow m\measuredangle MNC=90^\circ$$

- En ⊿MNC: $x^2+15^2=17^2$

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 125



Nos piden x.

- Dato:

$$\frac{m+n}{2a}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \frac{m+n}{a}=3$$

- Usemos el teorema de la bisectriz en los triángulos ABM y MBC

$$\frac{m}{a}=\frac{3}{x+2}\quad\rightarrow\quad\frac{n}{a}=\frac{x+3}{2}$$

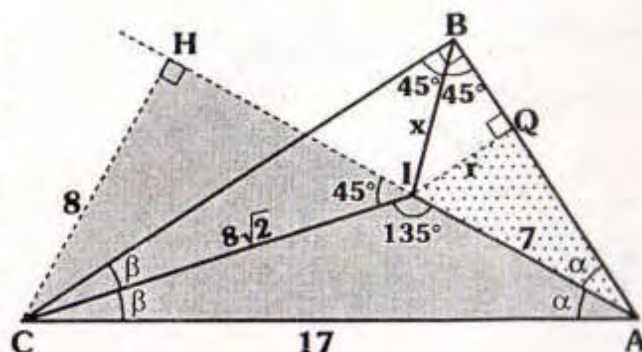
$$\Rightarrow\ \underbrace{\frac{m+n}{a}}=\frac{3}{x+2}+\frac{x+3}{2}$$

$$3\ =\frac{3}{x+2}+\frac{x+3}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=1}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 126



Piden x.

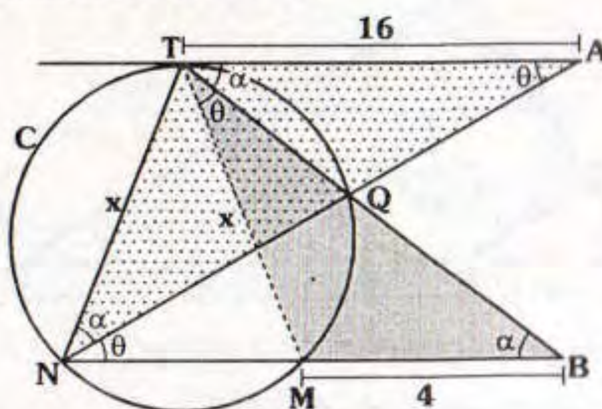
- En ⊿IQB: $x=r\sqrt{2}$
- En ⊿AQI ~ ⊿AHC

$$\Rightarrow\ \frac{r}{7}=\frac{8}{17}\ \Rightarrow\ r=\frac{56}{17}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{56\sqrt{2}}{17}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 127



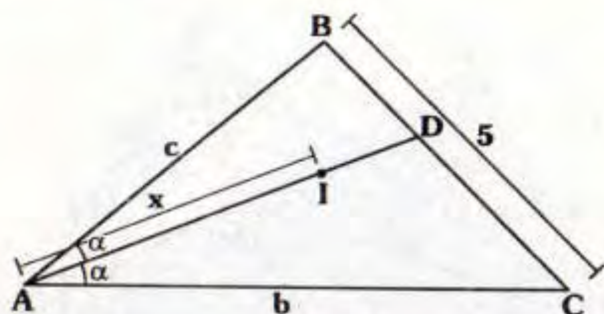
Nos piden x.

- Como $\overline{NM}//\overline{AT}\ \Rightarrow NT=TM=x$
- $\triangle NTA\sim\triangle BMT\ \Rightarrow\ \frac{x}{16}=\frac{4}{x}$

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 128



Piden x.

- Dato: Perímetro$_{(\triangle ABC)}$=25

$\Rightarrow$ b+c=20

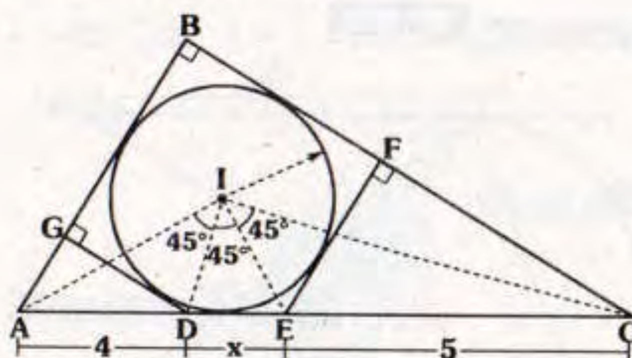
- Por teorema del incentro:

$$\frac{x}{10-x}=\frac{b+c}{5}=4$$

$\therefore$ **x = 8**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 129



Piden x.

- I es incentro del ⊿ABC

$\Rightarrow$ m∢AIC = 135°

- I es excentro de los ⊿s AGD y EFC.

$$\Rightarrow m\sphericalangle AID=\frac{m\sphericalangle AGD}{2}=45° \text{ y}$$

m∢EIC = 45°

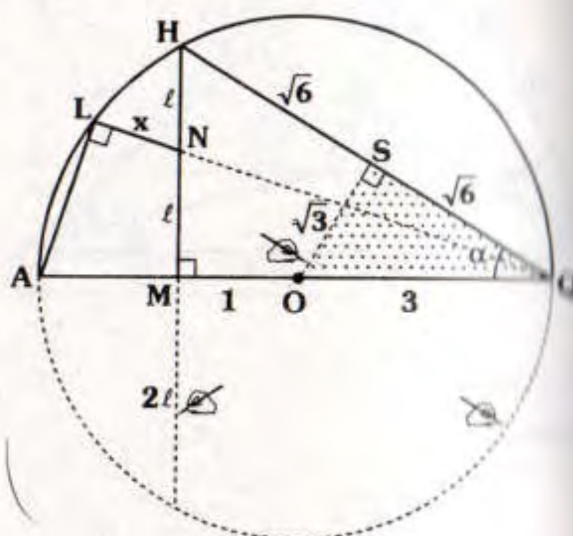
- Verificamos que A, D, E y C forman una cuaterna armónica, entonces:

$$\frac{4}{x}=\frac{9+x}{5} \Rightarrow x^2+9x-20=0$$

$\therefore$ **x = 1,84**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 130



Piden x.

- ⊿HMQ~⊿OSQ

$$\Rightarrow \frac{2\ell}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ell=\sqrt{2}$$

- En ⊿HMQ y ⊿NMQ:

MQ=4 y NQ= $3\sqrt{2}$

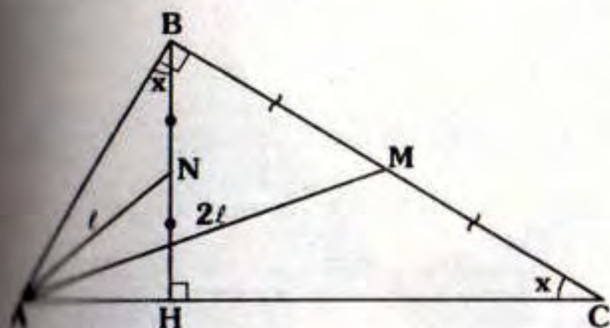
- Como:

$$x(NQ)=\ell\cdot3\ell \Rightarrow x(3\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}$$

$\therefore$ **x = $\sqrt{2}$**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 131



Piden x.

- ⊿AHB~⊿ABC, $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ son sus respectivas medianas homólogas

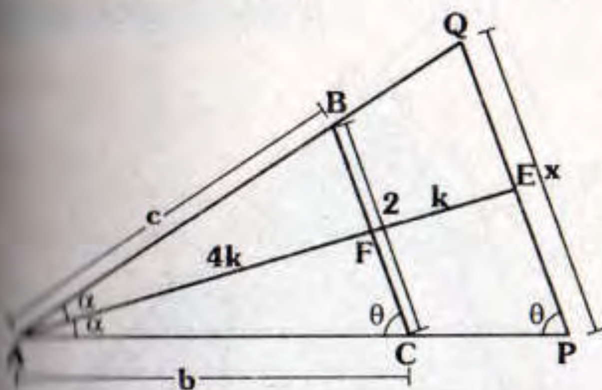
$$\Rightarrow \frac{AC}{2\ell}=\frac{AB}{\ell} \Rightarrow AC=2(AB)$$

- ⊿ABC: notable

$$\therefore \ \mathbf{x=30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 132



Piden x.

- Dato: b+c=10
- $\triangle AQP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{AE}{AF}$ ...(I)
- Por teorema del excentro:

$$\frac{AE}{EF}=\frac{b+c}{2}=5$$

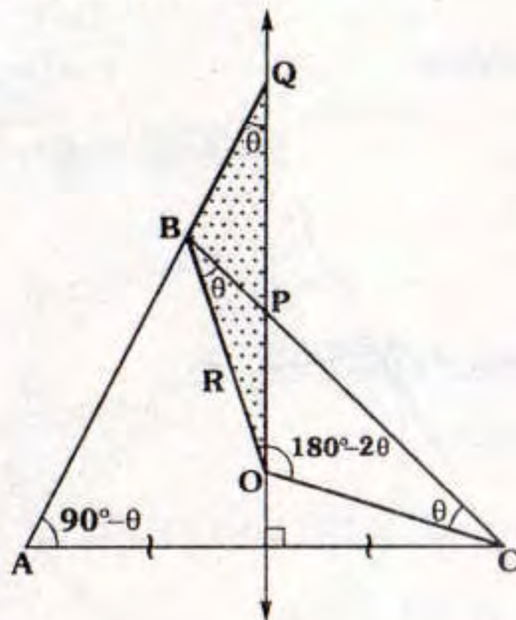
$$\Rightarrow AE=5k \text{ y } EF=k$$

- En (I): $\frac{x}{2}=\frac{5\cancel{k}}{4\cancel{k}}$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{5}{2}=2,5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 133



Piden R.

- Dato: (OP)(OQ)=36m²
- Al completar ángulos verificamos:

$$m\measuredangle AQO = m\measuredangle OBP = \theta$$

- En $\triangle OBQ$:

$$R^2=\underbrace{(OP)(OQ)}_{36m^2}$$

$$\therefore \ \mathbf{R=6m}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 134

Nos piden x.

- Dato: $m-n=a$ y $\ell+t=b$
- Ubicamos S en $\overline{BA}$ tal que $BS=n \Rightarrow AS=a$ y Q en $\overrightarrow{AC}$ tal que: $CQ=t \Rightarrow \ell+t=b$
- Como:

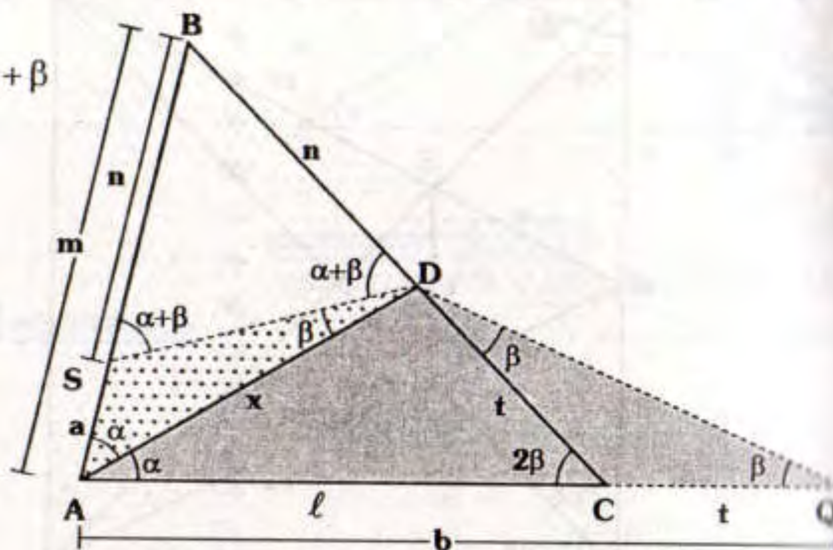
  $m\sphericalangle BSD = m\sphericalangle BDS = \alpha+\beta$

  $\Rightarrow m\sphericalangle SDA = \beta$

- $\Delta ASD \sim \Delta ADQ$

  $\Rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=\sqrt{ab}}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 135

Nos piden x.

- Como $\overline{ET} \perp \overline{MD}$ y $MT=TD$

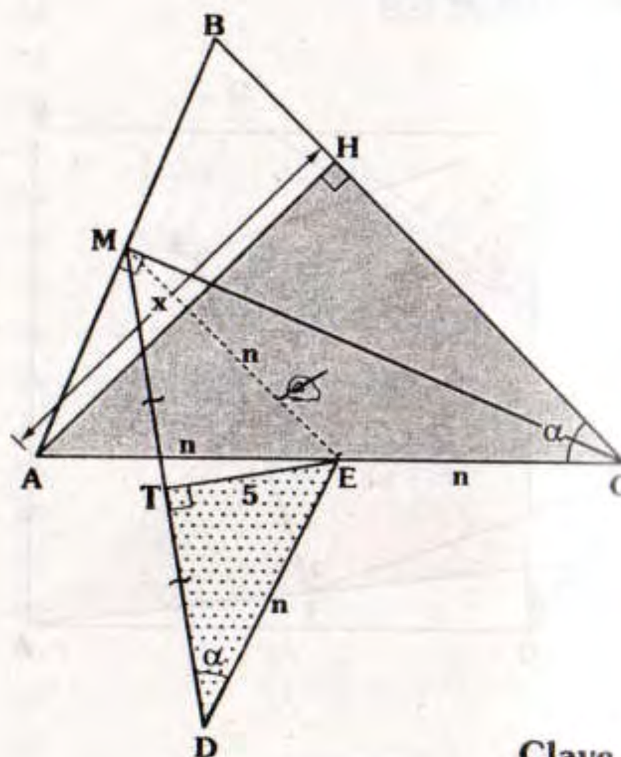
  $\Rightarrow EM=ED=n$

- En el ⊿AMC: $\overline{ME}$ es mediana.

- ⊿DTE ~ ⊿AHC

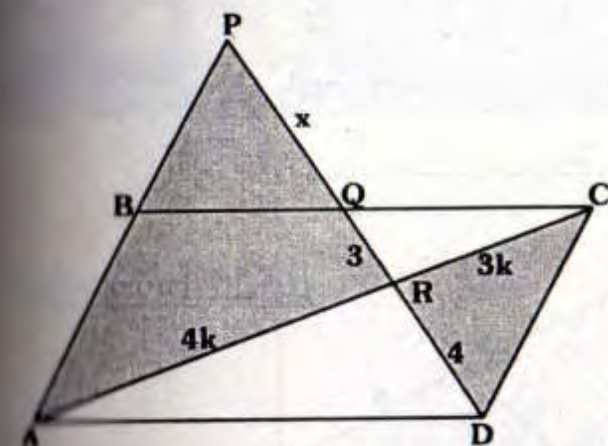
  $\Rightarrow \dfrac{x}{5}=\dfrac{2n}{n}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=10}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 136



Piden x.

- Como:

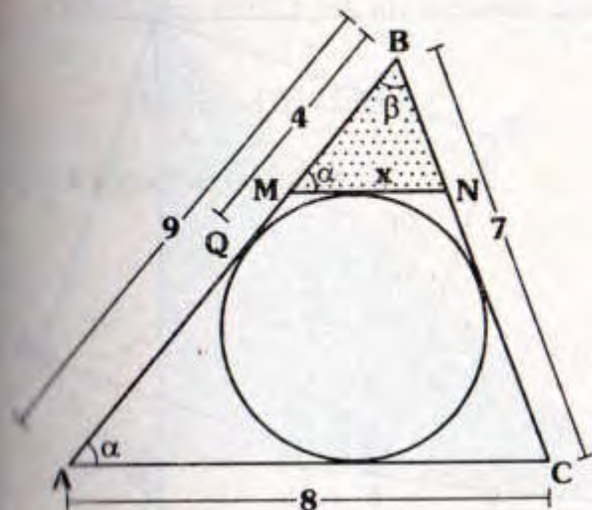
$\overline{QC}//\overline{AD} \Rightarrow AR=4k$ y $RC=3k$

$\overline{AP}//\overline{DC} \Rightarrow \frac{x+3}{4}=\frac{4k}{3k}$

$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{7}{3}}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 137



Nos piden x.

- Como $\Delta MBN \sim \Delta ABC$, vamos a comparar elementos homólogos (*en este caso razón de semiperímetros*).

$$\frac{x}{8}=\frac{P_{\Delta MBN}}{P_{\Delta ABC}} \qquad ...(I)$$

- $P_{\Delta ABC}$: Semiperímetro del ΔABC

- Por propiedad $P_{\Delta MBN}=BQ=\underbrace{P_{\Delta ABC}}_{12}-8$

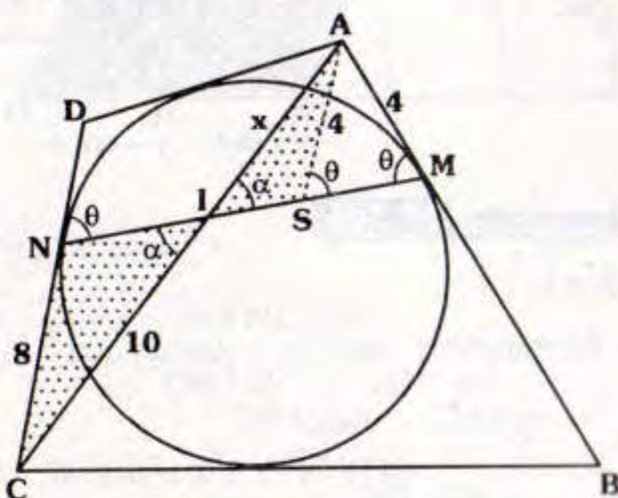
$$\Rightarrow P_{\Delta MBN}=4$$

- En (I): $\frac{x}{8}=\frac{4}{12}$

$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{8}{3}}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 138



Piden x.

- Notemos que $m\measuredangle DNM = m\measuredangle NMA$

- Se traza $\overline{AS}//\overline{DC} \Rightarrow \Delta SAM$ es isósceles con $AS=AM=4$

- $\Delta CNI \sim \Delta ASI \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{4}{8}$

$\therefore \quad \mathbf{x=5}$

Clave E

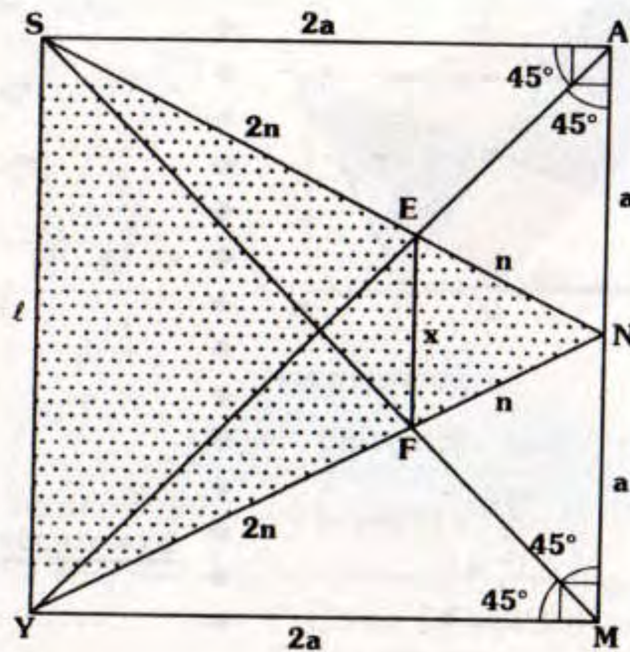
RESOLUCIÓN Nº 139

Piden x.

- Como AN=NM ⇒ ⊿YMN ≅ ⊿SAN, $\overline{AE}$ y $\overline{MF}$ son bisectrices .

$$\Rightarrow \frac{YF}{FN}=\frac{SE}{EN}$$

$$\Rightarrow \overline{EF}//\overline{SY}$$



- $\Delta ENF \sim \Delta SNY$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ell}=\frac{n}{3n}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{\ell}{3}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 140

Piden x.

- Al completar ángulos, notamos que

$$m\sphericalangle ACF = m\sphericalangle DCM$$

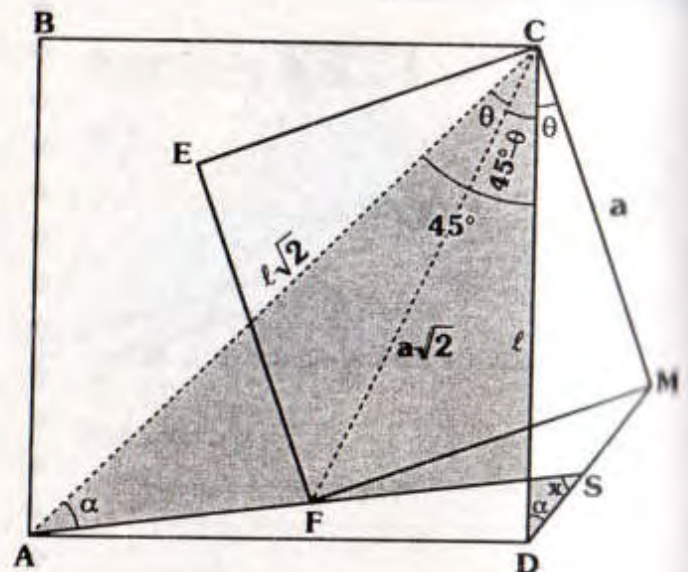
- Como $\frac{AC}{CF}=\frac{DC}{CM}$ $\Rightarrow \Delta ACF \sim \Delta DCM$

- Luego $m\sphericalangle CAF = m\sphericalangle CDM = \alpha$

- En la región sombreada:

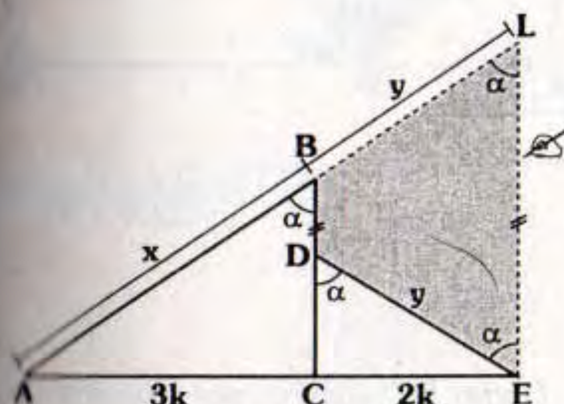
$$x+\alpha=45°+\alpha$$

$$\therefore \ \mathbf{x=45°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 141



Nos piden $\frac{x}{y}$

- Se prolonga $\overline{AB}$ y se ubica **L**, tal que: $\overline{CB}//\overline{EL}$ ⇒ DBLE es un trapecio isósceles

$$\Rightarrow \quad DE=BL=y$$

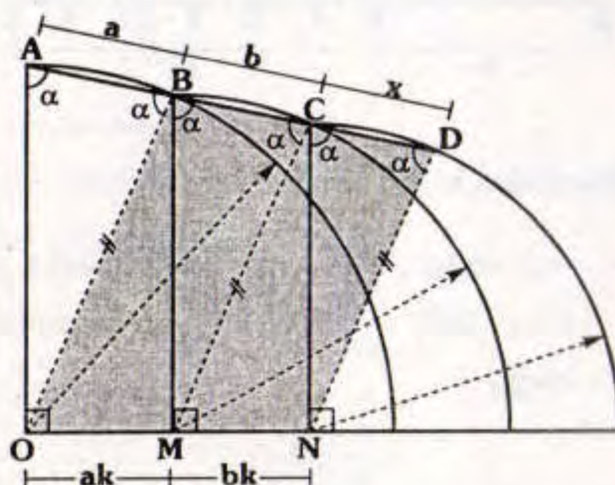
- Por teorema de Tales.

$$\frac{x}{y}=\frac{3k}{2k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y}=\frac{3}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 142



Nos piden x.

- Como $\overline{OA}//\overline{MB}//\overline{NC}$

$$\Rightarrow \quad OM=ak \quad y \quad MN=bk$$

- También: $\overline{OB}//\overline{MC}//\overline{ND}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{b}=\frac{bk}{ak}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{b^2}{a}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 143

Nos piden x.

- Por dato AMNB es un trapecio y $x+y>180° \Rightarrow \overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{MP}$ son secantes, luego:

$$\overline{AM}//\overline{BN}$$

- Se traza $\overline{PL}//\overline{NB} \Rightarrow$ por teorema de Tales:

$$\frac{MN}{NP}=\frac{AB}{BL} \Rightarrow BL=4$$

- $\triangle$LPC: isósceles

  (LP=PC=5 y LC=8)

- Se traza:

$$\overline{PH} \perp \overline{LC} \Rightarrow LH=HC=4$$

- ⊿PHC: notable

$$\therefore \ \mathbf{x=37°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 144

Nos piden x/y.

- Notemos que $m\measuredangle BDF=90°$ y $m\measuredangle BFD=\frac{53°}{2}$
- Como DF=2(BD), por teorema de la bisectriz interior:

$$\therefore \ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 145

Nos piden x

- Dato: $a^2=m\ell$ ...(I)
- ⊿DSB: notable de 30° $\Rightarrow$ $BS=\frac{a}{2}$
- ⊿DHB~⊿CSB:

$\Rightarrow \quad \dfrac{a}{BH} = \dfrac{\ell}{(a/2)} \Rightarrow 2a^2 = \ell(BH)$ ...(II)

- De (I) y (II):

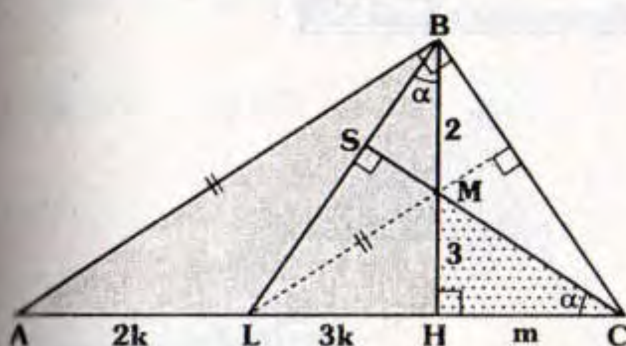
$$BH = \frac{m}{2} \Rightarrow AH = BH$$
$$\Rightarrow \quad x = \theta$$

- Luego $AD = DB \Rightarrow m\measuredangle BAD = m\measuredangle ABD$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 15°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 146



Nos piden: (AL)(HC)

- Como "M" es ortocentro del $\triangle LBC$

$\Rightarrow \overline{LM} // \overline{BC}$, es decir $\overline{LM} // \overline{AB}$

- Por teorema de Tales:

$$AL = 2k \text{ y } LH = 3k$$

- $\triangle MHC \sim \triangle LHB$

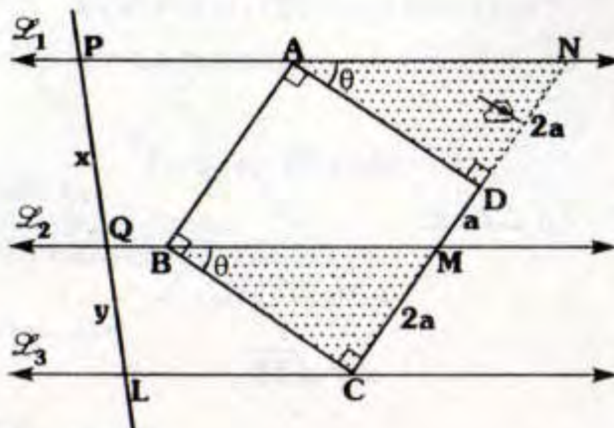
$$\frac{3}{m} = \frac{3k}{5} \Rightarrow mk = 5$$

- Finalmente: $(AL)(HC) = 2km$

$$\therefore \quad \mathbf{(AL)(HC) = 10}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 147



Nos piden x/y.

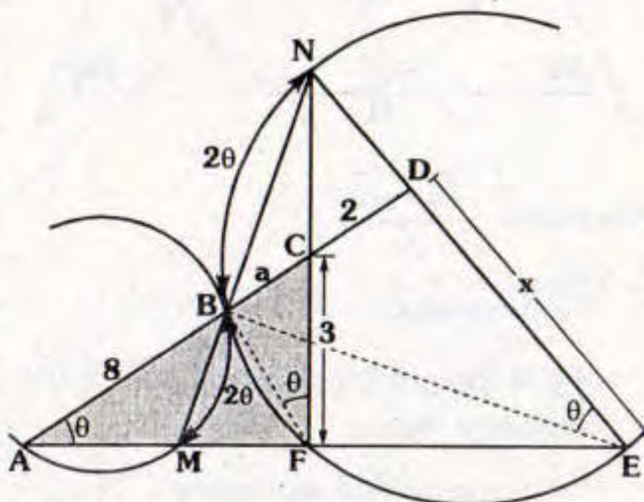
- $\triangle BCM \cong \triangle ADN \Rightarrow DN = CM = 2a$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{3a}{2a}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = \frac{3}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 148



Piden x

- Por propiedad de circunferencia:

$$m\widehat{MB} = m\widehat{BN}$$

- Luego:

$$m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle BFC = m\sphericalangle BED$$

- En ΔACF: por propiedad de semejanza.

$$3^2 = a(a+8) \Rightarrow a = 1$$

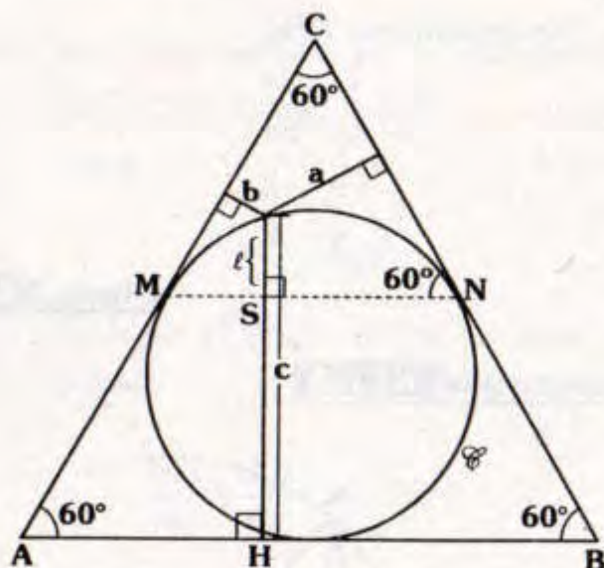
- En ΔADE:

$$x^2 = (3)(11)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{33}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 149



Nos piden: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

- Por propiedad:

M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

- Por propiedad de semejanza:

$$\ell^2 = ab \Rightarrow \ell = \sqrt{ab}$$

- En ΔMCN equilátero: "$a+b+\ell$" es la altura de dicho triángulo. Como $\overline{MN}$ es base media $\Rightarrow SH = a+b+\ell$.

- Luego: $c = SH + \ell$

$$c = a+b+2\ell$$

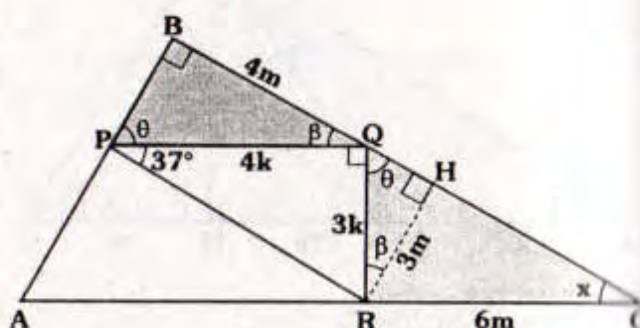
$$c = \underbrace{a+b+2\sqrt{ab}}$$

$$c = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = 1}$$

Clave I

RESOLUCIÓN Nº 150



Piden: x

Por dato: $3(BQ) = 2(RC)$ $\begin{cases} BQ = 4m \\ RC = 6m \end{cases}$

- $\measuredangle PQR$: notable de 37°
- $\measuredangle PBQ \sim \measuredangle QHR$: Como $PQ = 4k$ y $QR = 3k \Rightarrow RH = 3m$
- $\measuredangle RHC$: notable, pues $RC = 2(RH)$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 151

Nos piden la relación entre x, y, R_1 y R_2.

- Como $\overline{O_1O_2} // \overline{AC}$ $\Rightarrow \dfrac{AO_1}{AP} = \dfrac{CO_2}{CP}$ ...(1)
- $⊿AEO_1 \sim ⊿AFP$ $\Rightarrow \dfrac{AO_1}{AP} = \dfrac{R_1}{x}$ ...(2)
- $⊿CHO_2 \sim ⊿CGP$ $\Rightarrow \dfrac{CO_2}{CP} = \dfrac{R_2}{y}$ ...(3)
- De (1), (2) y (3): $\dfrac{R_1}{x} = \dfrac{R_2}{y}$ $\therefore$ $\mathbf{yR_1 = xR_2}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 152

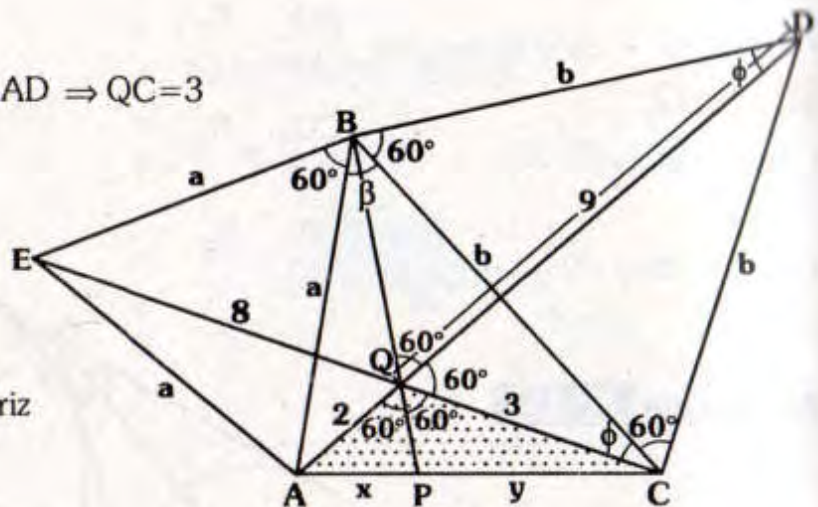
Nos piden x.

- Como los rectángulos ABEF y BCPQ son semejantes $\Rightarrow$ $m\measuredangle FBA = m\measuredangle PBC = \alpha$
- Se traza $\overline{BS} \perp \overline{FC}$ y $\overline{BT} \perp \overline{AP}$ $\Rightarrow$ los ⌂AFBS y ⌂BPCT son inscriptibles $\Rightarrow$ $m\measuredangle FSA = m\measuredangle PTC = \alpha$
- ⌂ASTC es inscriptible pues $m\measuredangle ASC = m\measuredangle ATC$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle ACH = m\measuredangle ATS = \phi$
- En ⌂SBTH: $m\measuredangle HBS = \phi$
- En (S, B, N, C): $x + \phi = 90° + \phi$ $\qquad \therefore$ $\mathbf{x = 90°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 153

Piden x/y



- $\Delta FBC \cong \Delta ABC$ (LAL) $\Rightarrow$ EC=AD $\Rightarrow$ QC=3
- También de la congruencia:

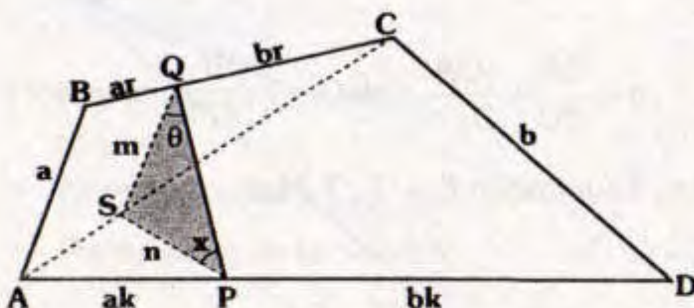
  $m\measuredangle BCE = m\measuredangle BDA = \phi$
- ⌂CQBD: inscriptible

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle CQD = 60°$
- En ΔAQC: Teorema de la bisectriz

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 154



Nos piden la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

Datos:

* La medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ es θ.

* $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BQ}{QC}$

- Sea AB=a y CD=b ⇒ AP=ak; PD=bk; BQ=ar y QC=br
- Se ubica S en $\overline{AC}$ tal que $\overline{QS} // \overline{BA}$ ⇒ AS=at y SC=bt
- Como $\dfrac{AS}{SC}=\dfrac{AP}{PD} \Rightarrow \overline{SP}//\overline{CD}$
- Luego: m∢SQP = θ y x=m∢SPQ (es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{CD}$)
- ΔSQC∼ΔABC

$$\Rightarrow \frac{m}{a}=\frac{b\cancel{t}}{(a+b)\cancel{t}} \Rightarrow m=\frac{ab}{a+b}$$

- ΔASP∼ΔACD

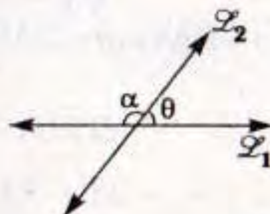
$$\Rightarrow \frac{n}{b}=\frac{a\cancel{k}}{(a+b)\cancel{k}} \Rightarrow n=\frac{ab}{a+b}$$

- Como m=n ⇒ ΔQSP:

isósceles x = θ


Observación

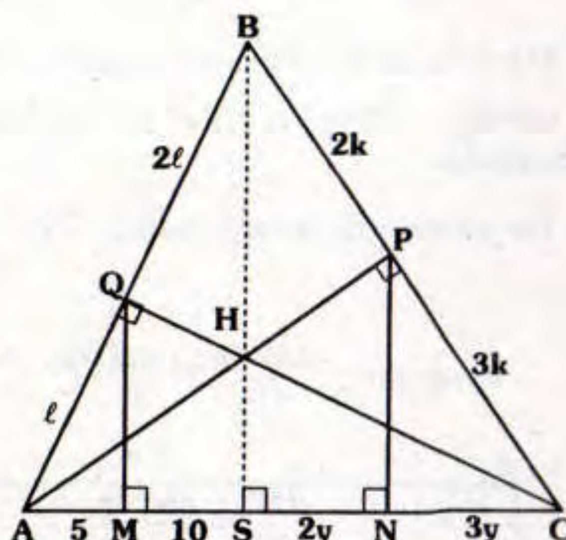
- *No olvidar la medida del ángulo entre dos rectas:*



"θ" ó "α" es medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

- *En realidad en el problema la respuesta es "θ" ó "180° − θ"*

RESOLUCIÓN Nº 155



Nos piden NC.

- Como H es ortocentro ⇒ $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
- Por teorema de Tales:
  - * $\overline{QM}//\overline{BS}$ ⇒ MS=10
  - * $\overline{PN}//\overline{BS}$ ⇒ SN=2y y NC=3y
- Por teorema de Ceva:

$$(15)(2\ell)(3k)=(5y)(\ell)(2k)$$

$$9=y$$

$$\therefore \quad \mathbf{NC=27}$$

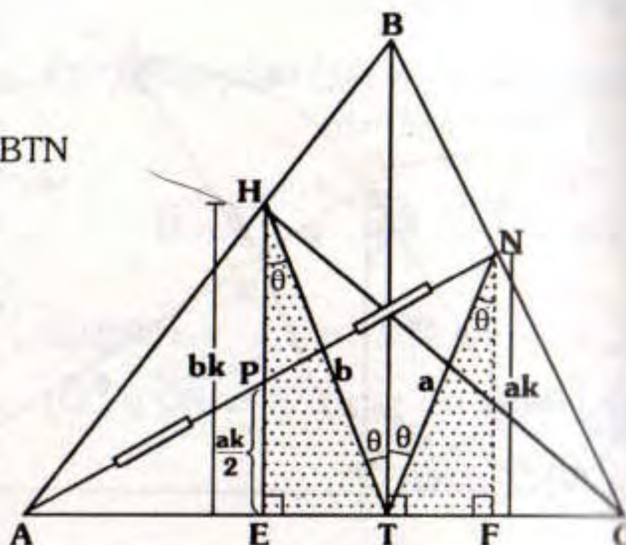
Clave E

RESOLUCIÓN Nº 156

Nos piden $\frac{HP}{PE}$.

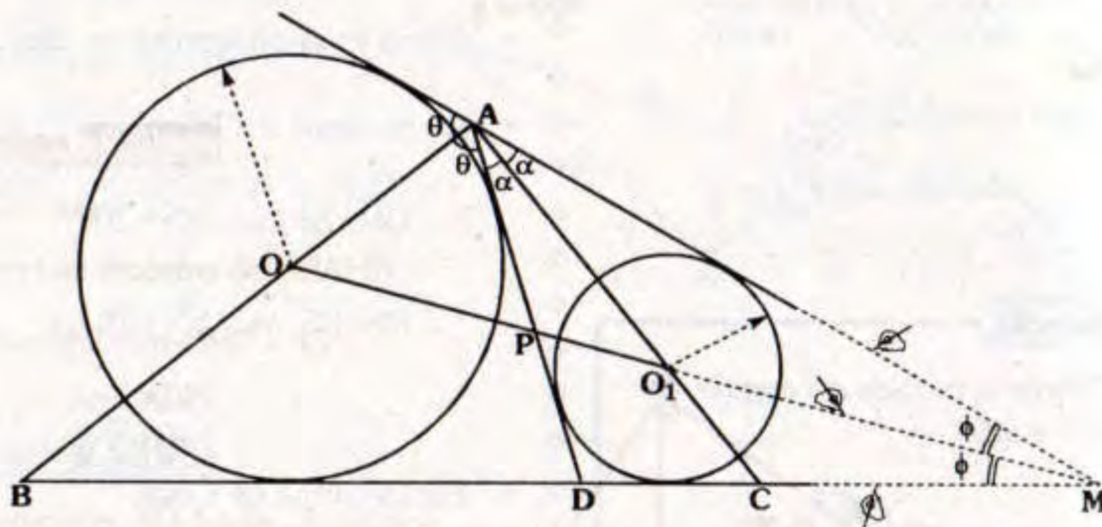
- Por teorema de Blanchet: $m\sphericalangle HTB = m\sphericalangle BTN$
- $⊿HET \sim ⊿NFT \Rightarrow NF = ak$ y $HE = bk$
- Por teorema de la base media: $PE = \frac{ak}{2}$
- Finalmente: $\frac{HP}{PE} = \frac{\left(b - \frac{a}{2}\right)k}{\frac{ak}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{HP}{PE} = \frac{2b - a}{a}$$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 157



Nos piden: $\frac{AP}{PD}$; Dato: $\frac{AO_1}{O_1C} + \frac{AO}{OB} = a$

- Notemos que: M, C, D y B constituyen una cuaterna armónica.
- Por teorema de la bisectriz:

* En $\triangle AMD$: $\frac{AP}{PD} = \frac{MA}{MD}$ * En $\triangle MAC$: $\frac{AO_1}{O_1C} = \frac{MA}{MC}$ * En $\triangle MAB$: $\frac{AO}{OB} = \frac{MA}{MB}$

- Como M, C,D y B es cuaterna armónica, por teorema de Descartes:

$$\frac{1}{MC}+\frac{1}{MB}=\frac{2}{MD} \Rightarrow \frac{MA}{MC}+\frac{MA}{MB}=2\left(\frac{MA}{MD}\right) \Rightarrow \underbrace{\frac{AO_1}{O_1C}+\frac{AO}{OB}}_{a}=2\left(\frac{AP}{PD}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{AP}{PD}=\frac{a}{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 158

Nos piden x.

- Como ⊿NMA~⊿CBA, sea AM=a y AB=b ⇒ AN=ak y AC=bk
- Notamos que:

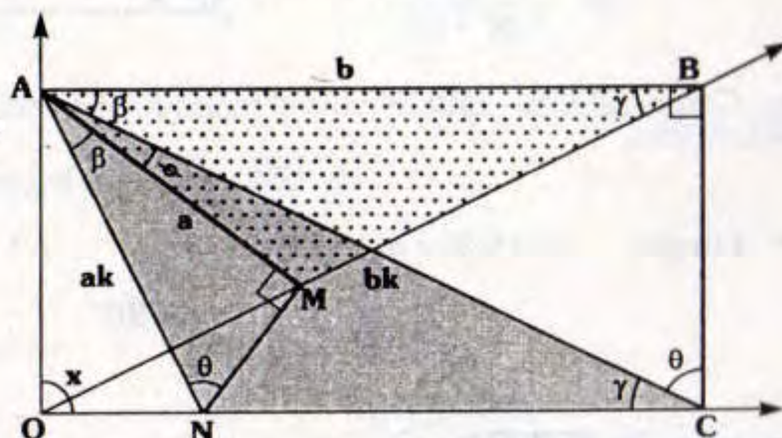
$$\frac{NA}{AC}=\frac{MA}{AB} \text{ y } m\measuredangle NAC=m\measuredangle MAB$$

⇒ ΔAMB~ΔANC

- Luego m∢NCA = m∢MBA = γ

⇒ ⌂OABC es inscriptible

$$\therefore \quad \mathbf{x=90°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 159

Nos piden x.

- Se ubica L en $\overline{HC}$, tal que AH=HL=x

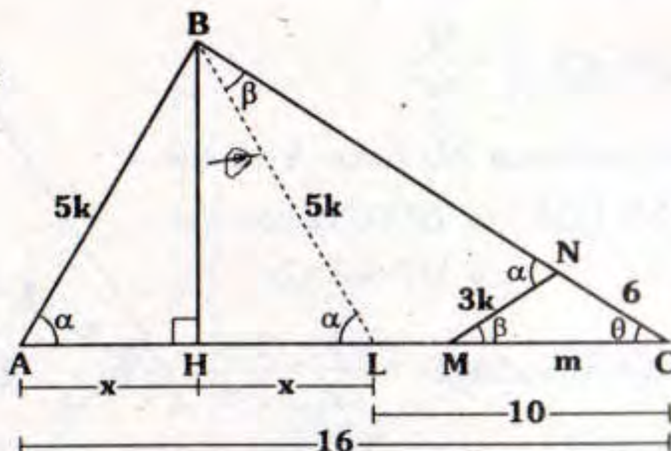
⇒ m∢BAC = m∢ALB = α y BL=5k

- ΔMNC~ΔBLC

$$\Rightarrow \frac{LC}{6}=\frac{5k}{3k} \Rightarrow LC=10$$

- Finalmente: 2x+10=16

$$\therefore \quad \mathbf{x=3}$$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 160

Nos piden x.

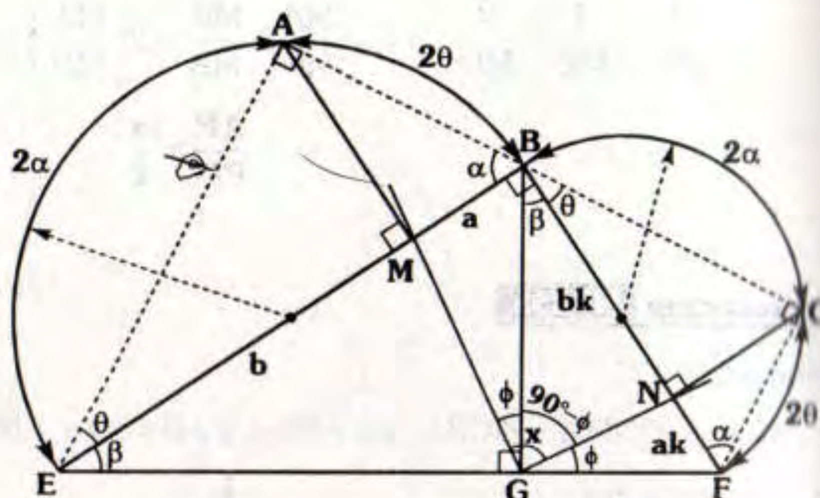
Dato: $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = 180°$

- Del dato se deduce:

  $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CF}$ y $m\overset{\frown}{AE} = m\overset{\frown}{BC}$

- ⊿EAB ~ ⊿BCF ⇒ como $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son alturas homólogas

  $$\Rightarrow \quad \frac{EM}{MB} = \frac{BN}{NF}$$



- Como ⊿EGB ~ ⊿BGF, considerando lo anterior:

  ⇒ $\overline{GM}$ y $\overline{GN}$ son líneas homólogas

- Luego: m∢MGB = m∢NGF = ϕ

  ∴ **x = 90°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 161

Nos piden x/y.

- Como I es incentro del ⊿AHB

  ⇒ m∢AHI = m∢IHP = 45°

  $$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{AH}{HP}$$

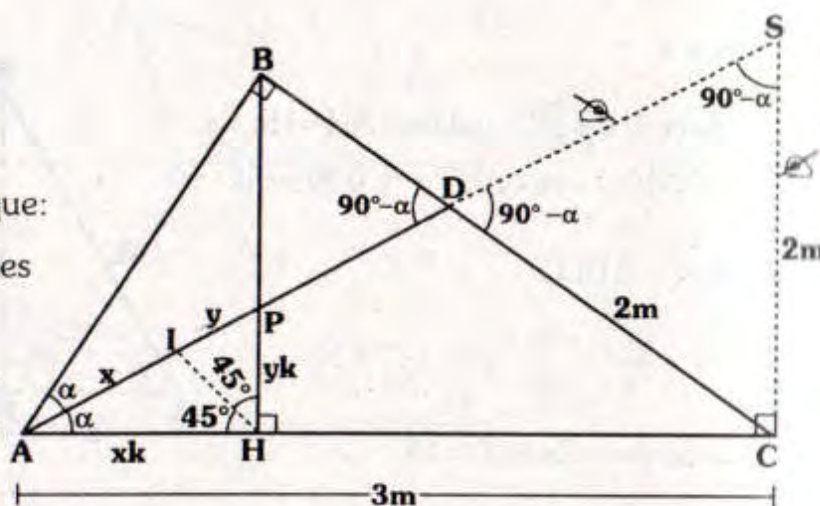
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta **S** tal que:

  $\overline{SC} \perp \overline{CA}$ ⇒ ΔCDS es isósceles

  ⇒ DC = CS = 2m

- ⊿AHP ~ ⊿ACS ⇒ $\frac{x\cancel{k}}{y\cancel{k}} = \frac{3\cancel{m}}{2\cancel{m}}$

  ∴ $\mathbf{\frac{x}{y} = \frac{3}{2}}$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 162

Nos piden x, en función de R y r.

- Por propiedad de circunferencia:

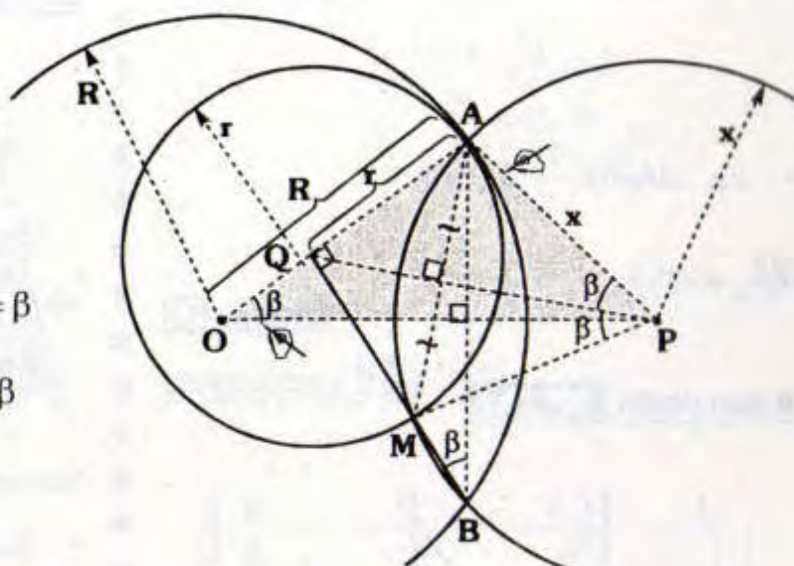
$$\overline{QP} \perp \overline{AM} \text{ y } \overline{AB} \perp \overline{OP}$$

- Sea $m\measuredangle AOP = \beta \Rightarrow m\measuredangle QBA = \beta$

$$\Rightarrow m\widehat{MA} = 2\beta \Rightarrow m\measuredangle QPA = \beta$$

- En $\triangle OAP$: $x^2 = rR$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{Rr}}$$



Clave C

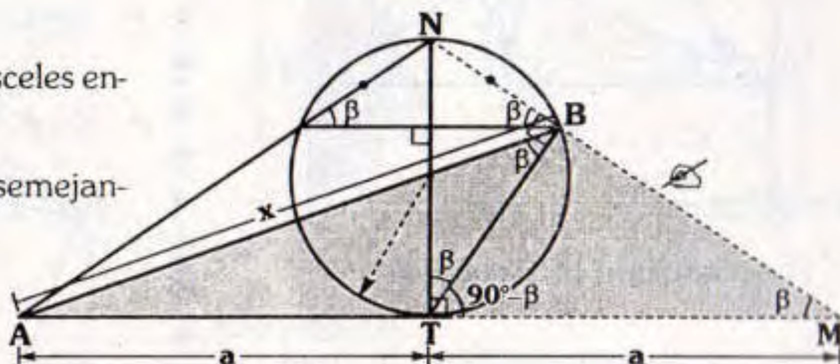
RESOLUCIÓN Nº 163

Piden x.

- Notamos que el $\triangle ANM$ es isósceles entonces $AT = TM = a$
- En $\triangle ABM$, por propiedad de semejanza:

$$x^2 = a(2a)$$

$$\therefore \mathbf{x = a\sqrt{2}}$$



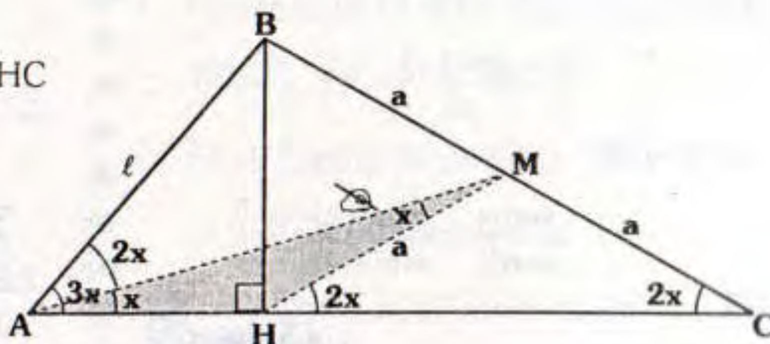
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 164

Piden x.

- Se traza la mediana HM del $\triangle BHC$ $\Rightarrow BM = MC = HM = a$
- $\triangle AHM$: isósceles
- Notemos que:

$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle MAB = 2x$$



$\Rightarrow$ por propiedad de semejanza:

$$\ell^2=a(2a)$$

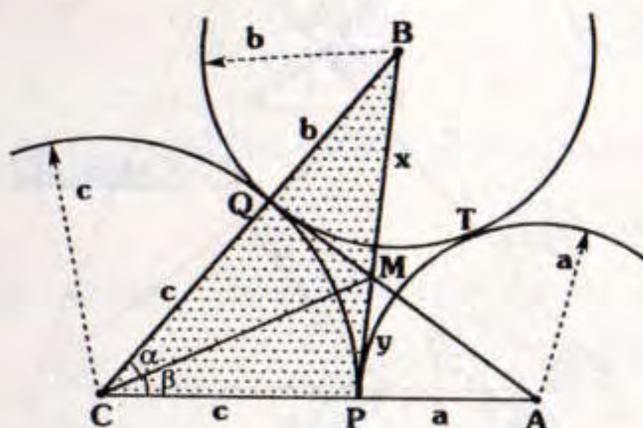
$$\Rightarrow \ell=a\sqrt{2}$$

- En ⊿AHB: $3x=45°$

$$\therefore \ \mathbf{x=15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 165



Nos piden $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}$

- Por propiedad de semejanza:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}=\frac{xc}{y(b+c)} \qquad ...(I)$$

- En ΔPBC: Teorema de Menelao ($\overleftrightarrow{QMA}$ es la recta secante):

$$cxa=by(a+c)$$

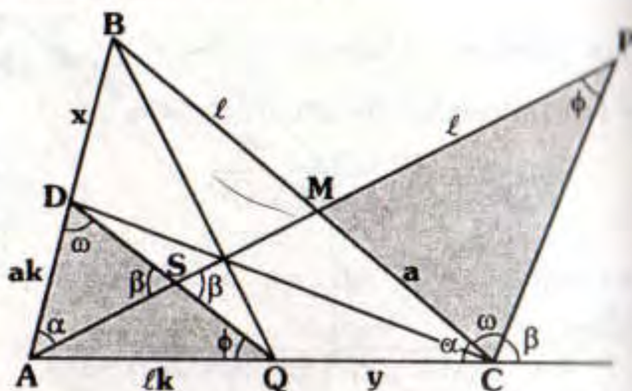
$$\frac{x}{y}=\frac{b(a+c)}{ac} \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{sen\alpha}{sen\beta}=\frac{b(a+c)}{a(b+c)}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 166



Nos piden x/y

- Sea m∢MCP = ω, como $\alpha+\omega+\beta=180°$

$$\Rightarrow \text{m∢ADQ} = \omega$$

- Como ⌂QSPC es inscriptible

$$\Rightarrow \text{m∢SPC} = \text{m∢SQA}$$

- $\Delta MCP \sim \Delta ADQ$

  AD=ak y AQ=ℓk

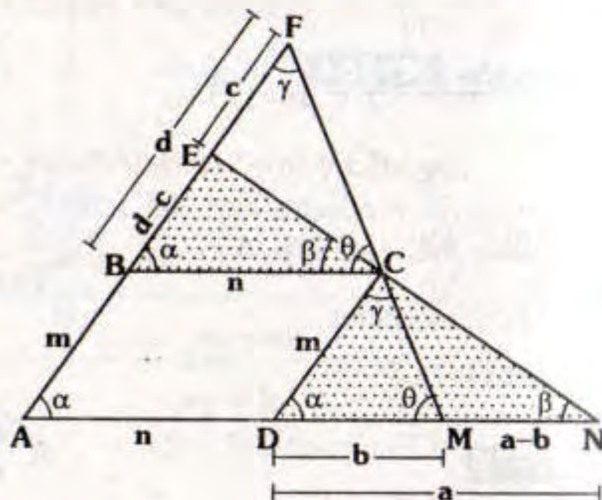
- En ΔABC, por teorema de Ceva:

$$x(\ell k)(a) = y(ak)\ell$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y}=1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 167



Nos piden la relación entre "a, b,c y d"

- $\Delta BEC \sim \Delta DCN$

$$\frac{d-c}{m}=\frac{n}{a} \Rightarrow a(d-c)=mn \quad ...(I)$$

- $\Delta BFC \sim \Delta DCM$

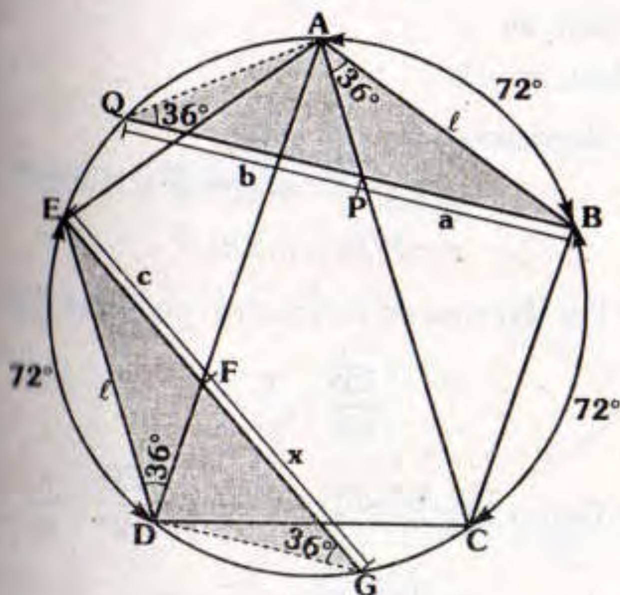
$$\frac{d}{m}=\frac{n}{b} \Rightarrow bd=mn \quad ...(II)$$

De (I) y (II):

$$\therefore \quad \mathbf{a(d-c)=bd}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 168



Nos piden x.

- Sea "ℓ" la longitud del lado del pentágono regular ABCDE.

- En ΔQAB: $\ell^2 = a(a+b)$ ...(I)

- En ΔDEG: $\ell^2 = c(c+x)$ ...(II)

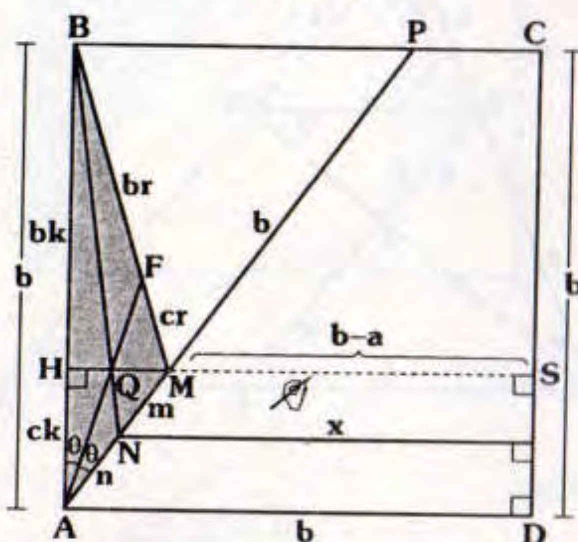
- De (I) y (II):

$$c(c+x) = a(a+b)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{a^2+ab-c^2}{c}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 169



Nos piden x.

Datos:

$$MH=a \Rightarrow MS=b-a$$

- Sea: $AM=c \Rightarrow AH=ck$ y $HB=bk$

- Por teorema de la bisectriz en el ΔAMB:

$$BF=br \text{ y } FM=cr$$

- En el ΔAMB, teorema de Ceva:

$$m(br)(ck)=n(cr)(bk) \Rightarrow m=n$$

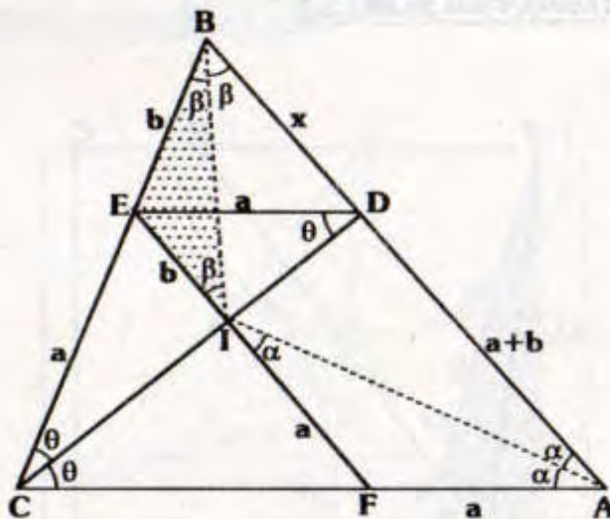
- Finalmente, en el trapecio AMSD, por base media:

$$x=\frac{b+b-a}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=\frac{2b-a}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 170



Piden x.

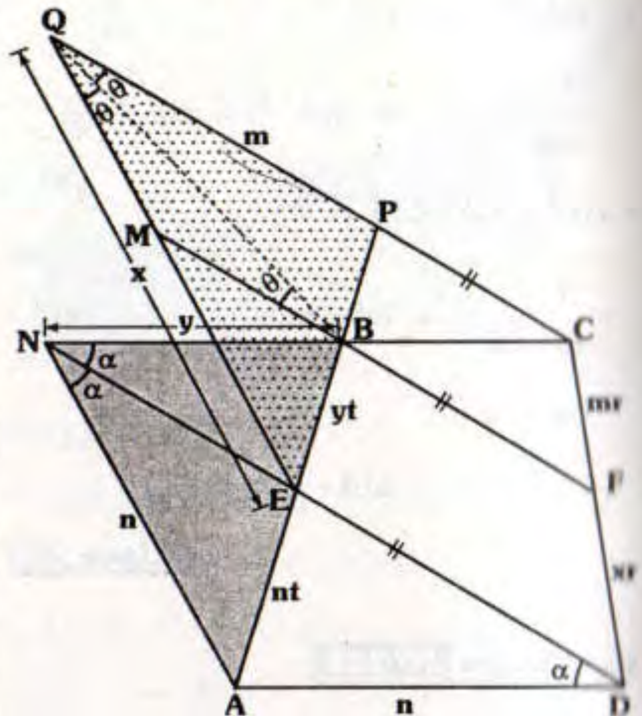
- Como I es incentro ⇒ $\overline{CI}$, $\overline{AI}$ y $\overline{BI}$ son bisectrices.
- ΔCED: isósceles ⇒ CE=ED=a
- ΔFIA : isósceles ⇒ AF=FI=a
- ΔIEB : isósceles ⇒ EB=EI=b
- Luego: FE=AD=a+b
- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{a+b}=\frac{b}{a}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=\frac{b}{a}(a+b)}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 171



Piden: xy.

Dato: mn=k

- Verificamos rápidamente:

$$m\measuredangle ANE = m\measuredangle ENB \text{ y}$$
$$m\measuredangle EQB = m\measuredangle BQP$$

- Por teorema de la bisectriz, en el ΔEQP:

$$\frac{EB}{BP}=\frac{x}{m}$$

- Como $\overline{PC}//\overline{BF}//\overline{ED}$ ⇒ $\frac{CF}{FD}=\frac{EB}{BP}=\frac{x}{m}$

$$\Rightarrow FD=xr \text{ y } CF=mr$$

- En ΔANB: AE=nt y EB=yt
- Como $\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$ ⇒ $\frac{y\not{t}}{n\not{t}}=\frac{m\not{r}}{x\not{r}}$

$$\Rightarrow xy=mn$$

$$\therefore\quad \mathbf{xy=k}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 172

Piden x+y.

- Notamos que $\overline{CQ}$ es bisectriz interior del $\triangle BCP$.
- Sea: $BC=a$ y $CP=b$

$\Rightarrow BQ=ak$ y $QP=bk$

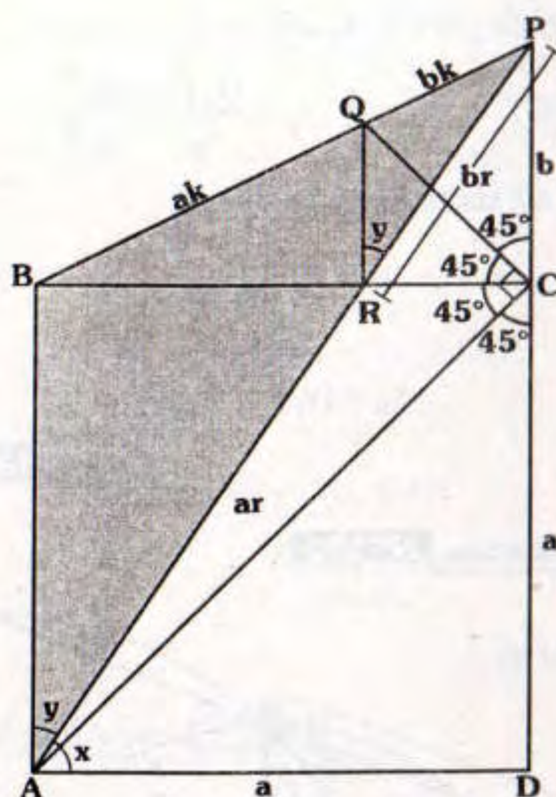
- Por teorema de Tales:

$PR=br$ y $RA=ar$

- Como: $\dfrac{BQ}{QP}=\dfrac{AR}{RP} \Rightarrow \overline{AB}//\overline{RQ}$

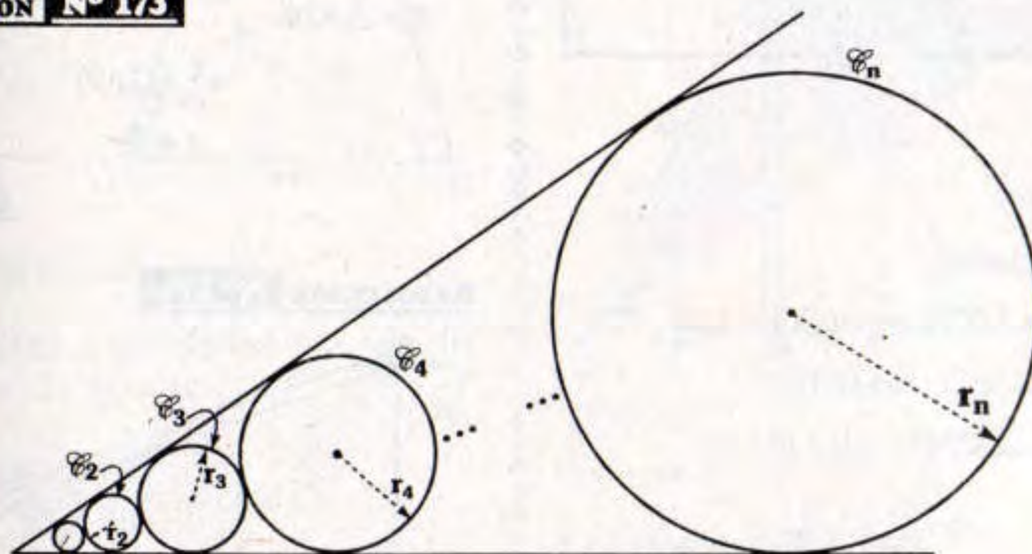
$\Rightarrow m\measuredangle BAP = y$

$\therefore \quad \mathbf{x + y = 90°}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 173



Nos piden r_n.

- Analicemos, primero para r_1, r_2 y r_3 por propiedad:

$$(r_2)^2 = r_1 r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{(r_2)^2}{r_1}$$

- Ahora para r_2, r_3 y r_4:

$$(r_3)^2 = r_2 r_4 \;\Rightarrow\; r_4 = \frac{(r_3)^2}{r_2} = \frac{(r_2)^3}{(r_1)^2}$$

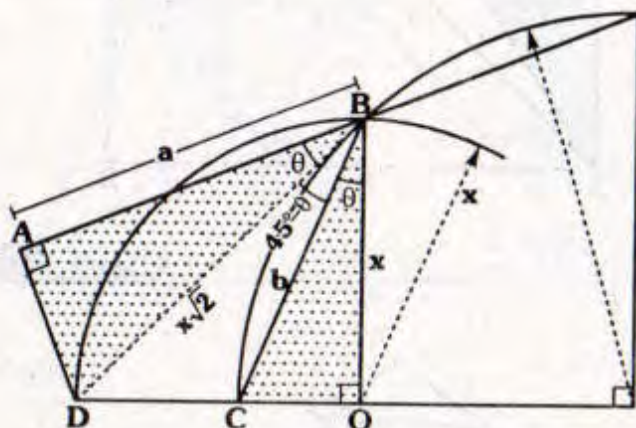
- y así sucesivamente, luego:

$$r_n = \frac{(r_2)^{n-1}}{(r_1)^{n-2}}$$

$$\therefore\; \mathbf{r_n = (r_1)^{2-n}(r_2)^{n-1}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 174



Piden x.

Dato: ab=12

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle DBO = 45°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle CBO$$

- Notamos: ⊿DAB ~ ⊿COB

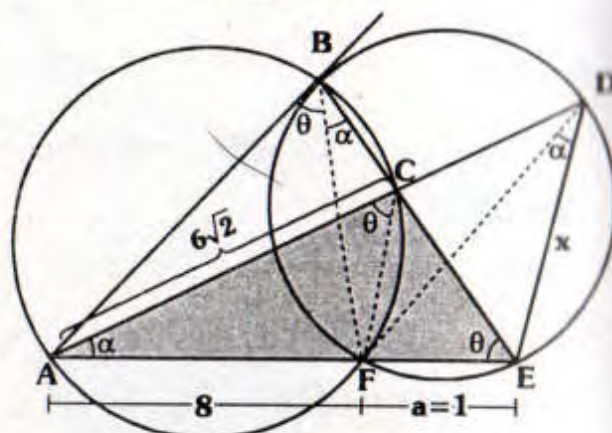
$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x^2\sqrt{2} = \underbrace{ab}_{12\sqrt{2}}$$

$$\therefore\; \mathbf{x = 2\sqrt{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 175



Nos piden x.

- Primero completemos ángulos:
  - $m\sphericalangle AEB = m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle ACF = \theta$
  - $m\sphericalangle FAC = m\sphericalangle FBC = m\sphericalangle FDE = \alpha$
- En △ACE:

$$(6\sqrt{2})^2 = 8(8+a) \;\rightarrow\; a = 1$$

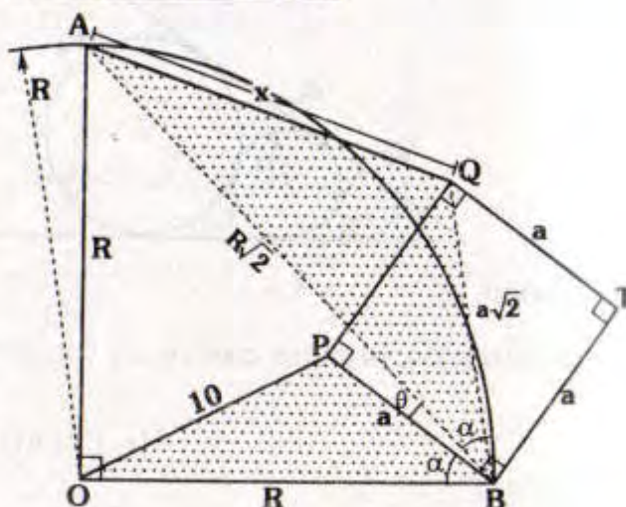
- En △ADE:

$$x^2 = (1)(9)$$

$$\therefore\; \mathbf{x = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 176



Piden x.

- Notemos:

$$m\sphericalangle OBA = m\sphericalangle PBQ = 45°$$

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle OBP = m\sphericalangle ABQ = \alpha$$

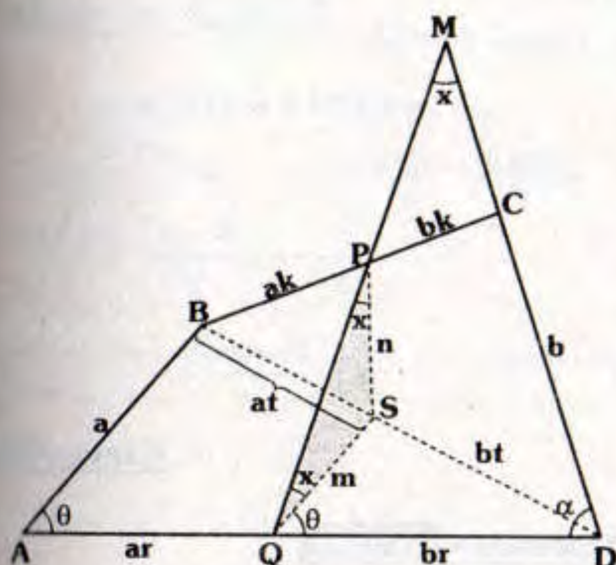
- $\Delta OBP \sim \Delta ABQ$

$$\Rightarrow\ x = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 14,14}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 177



Piden x; dato: $\alpha + \theta = 140°$

- Ubiquemos S en $\overline{BD}$ tal que $\overline{PS}//\overline{CD}$ $\Rightarrow$ BS=at y SD= bt

- Como: $\dfrac{BS}{SD} = \dfrac{AQ}{QD} \Rightarrow \overline{AB}//\overline{QS}$

- $\Delta BPS \sim \Delta BCD \Rightarrow \dfrac{n}{b} = \dfrac{ak}{(a+b)k}$

$$\Rightarrow\ n = \frac{ab}{a+b}$$

- $\Delta QSD \sim \Delta ABD \Rightarrow \dfrac{m}{a} = \dfrac{b\cancel{t}}{(a+b)\cancel{t}}$

$$\Rightarrow\ m = \frac{ab}{a+b}$$

- Como m=n $\Rightarrow$ ΔQSP: isósceles

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle PQS = m\sphericalangle QPS = x$$

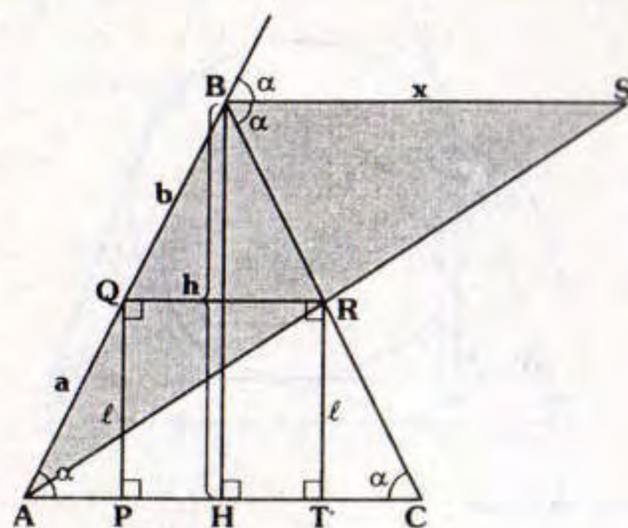
- En ΔQMD:

$$2x + \underbrace{\alpha + \theta}_{140°} = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 178



Piden x.

Dato: h=4

- Notamos que $\overline{BS}//\overline{AC}$

- $\Delta AQR \sim \Delta ABS$

Como QR= ℓ $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{a+b}{a}$

- ⊿APQ ~ ⊿AHB:

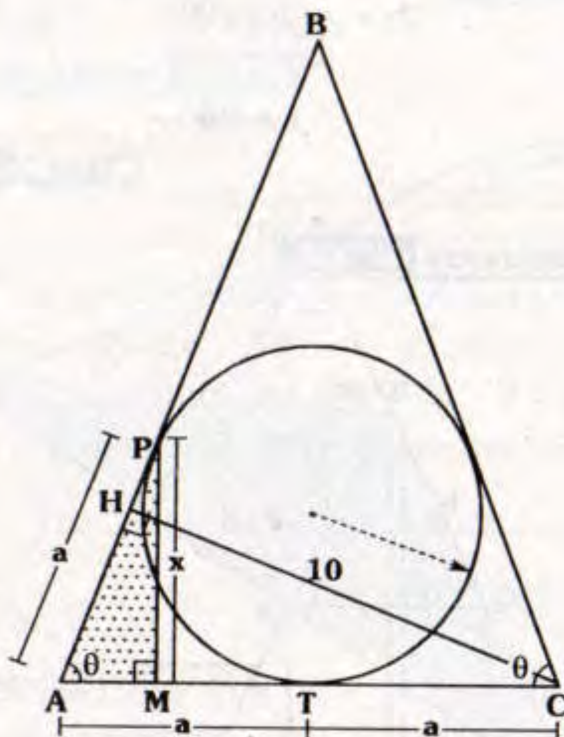
$$\frac{h}{\ell}=\frac{a+b}{a}$$

- Luego: $x=h$

$$\therefore\quad \mathbf{x=4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 179



Nos piden x.

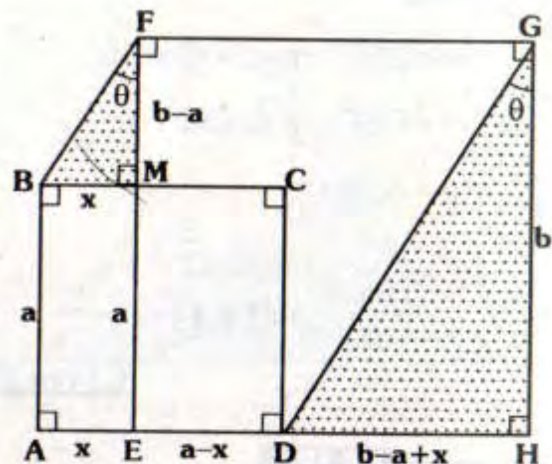
- Como $\triangle ABC$ es isósceles $\Rightarrow AT=TC=a$
- $\triangle AMP \sim \triangle AHC$:

$$\frac{x}{10}=\frac{a}{2a}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 180



Piden x.

- Como $\overline{BF}//\overline{DG}$

$$\Rightarrow\quad m\sphericalangle BFM=m\sphericalangle DGH$$

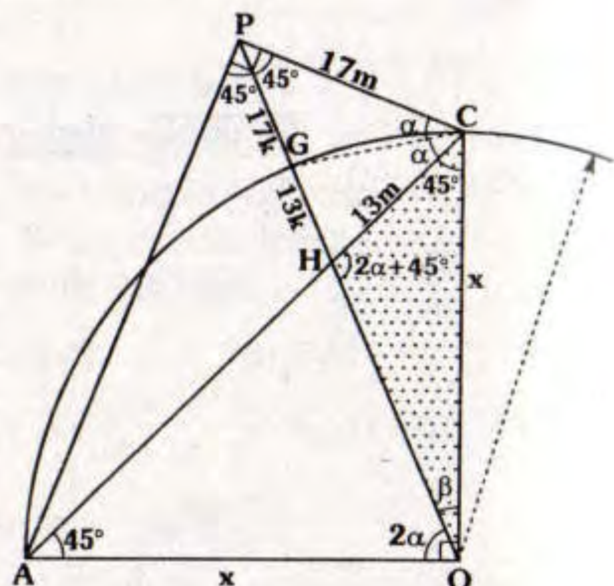
- $\triangle BMF \sim \triangle DHG$

$$\Rightarrow\quad \frac{x}{b-a+x}=\frac{b-a}{b}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=\frac{(b-a)^2}{a}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 181



Piden x.

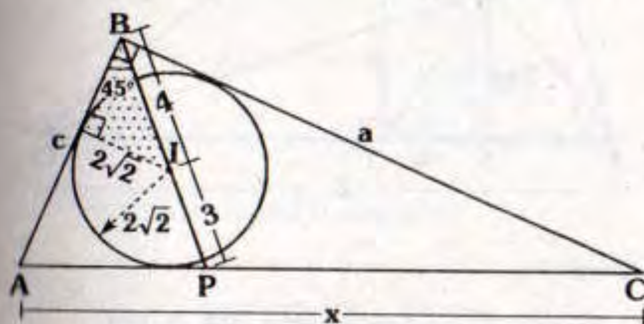
Dato: OP=34

- Sea $m\measuredangle GCA=\alpha \Rightarrow m\measuredangle AOG=2\alpha$
- Como ⏢APCO es inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle GCP=\alpha$
- $\Delta HCO \sim \Delta PCO \Rightarrow \dfrac{x}{34}=\dfrac{13\cancel{m}}{17\cancel{m}}$

$$\therefore\ \mathbf{x=26}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 182



Nos piden x.

- Usemos el teorema del incentro:

$$\frac{a+c}{x}=\frac{4}{3} \Rightarrow 3(a+c)=4x \quad ...(I)$$

- Por teorema de Poncelet:

$$a+c=x+2\left(2\sqrt{2}\right) \quad ...(II)$$

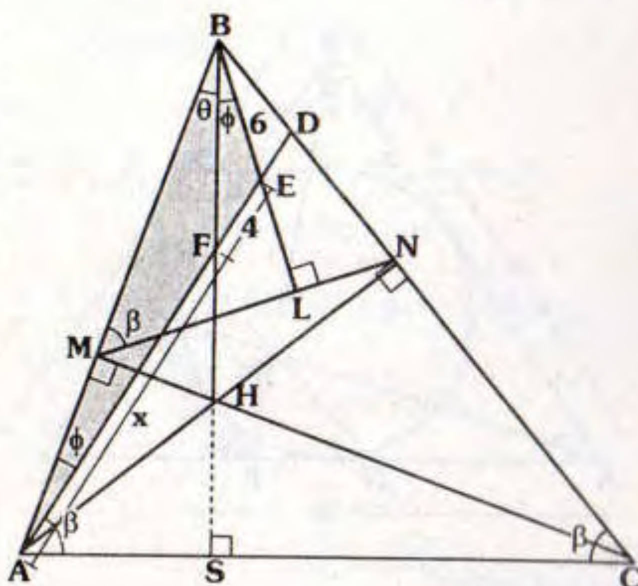
- De (I) y (II):

$$3\left(x+4\sqrt{2}\right)=4x$$

$$\therefore\ \mathbf{x=12\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 183



Piden x.

- Como DA=DC

$$\Rightarrow m\measuredangle DAC=m\measuredangle ACD=\beta$$

- ⏢AMNC: inscriptible

$$\Rightarrow m\measuredangle NMB=\beta$$

- Sea $m\measuredangle DAB=\phi$ y $m\measuredangle ABH=\theta$

$$\Rightarrow \theta+\phi+\beta=90°$$

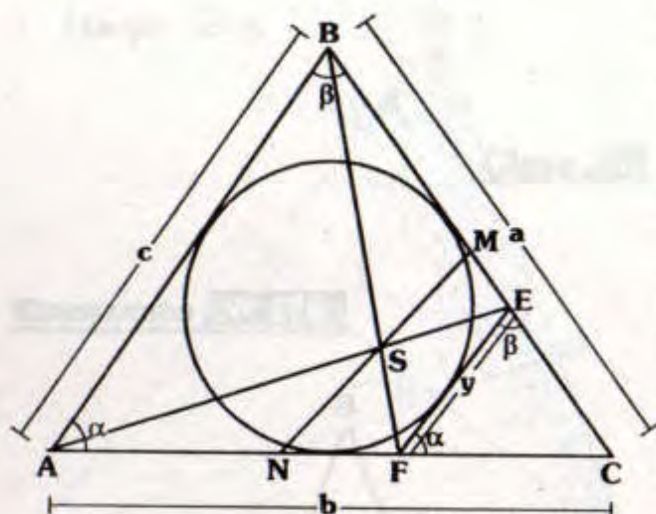
- ⊿MLB: $m\measuredangle EBS=\phi$
- ΔAEB:

$$6^2=4(4+x)$$

$$\therefore\ \mathbf{x=5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 184



Nos piden MN.

- Por propiedad de semejanza:

$$SN = SM = \frac{cy}{c+y}$$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{2cy}{c+y} \qquad ...(I)$$

- Como $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

$$\frac{y}{c} = \frac{P_{\Delta FEC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{CM}{P_{\Delta ABC}} = \frac{P_{\Delta ABC} - c}{P_{\Delta ABC}} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

Donde $P_{\Delta ABC}$: semiperímetro del ΔABC

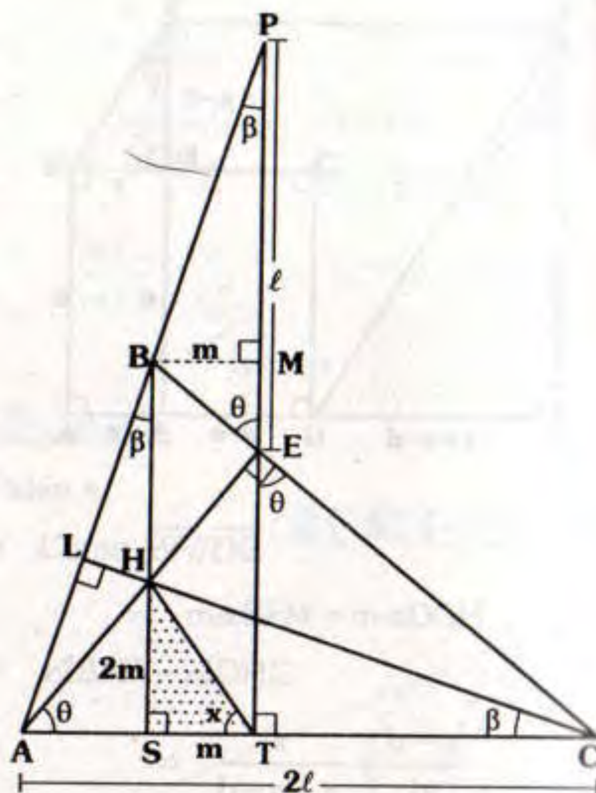
$$\Rightarrow \quad y = \frac{c(a+b-c)}{a+b+c} \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore \quad \mathbf{MN = \frac{c(a+b-c)}{a+b}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 185



Piden x.

- Como H es ortocentro del ΔABC

$$\Rightarrow \overline{CL}, \overline{BS} \text{ y } \overline{AE} \text{ son alturas}$$

- También $\overline{BS} // \overline{PT}$
- Notemos:

  $m\sphericalangle ACH = m\sphericalangle SBA = m\sphericalangle BPT = \beta$

  $m\sphericalangle HAC = m\sphericalangle TEC = m\sphericalangle PEB = \theta$

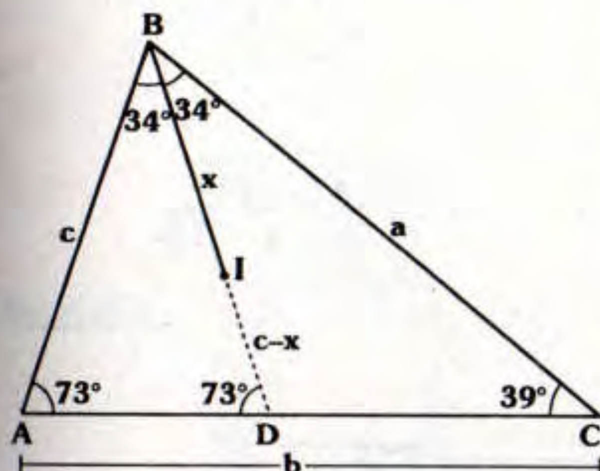
- $\Delta AHC \sim \Delta EBP \rightarrow HS = 2(BM)$
- Finalmente, notemos en el ⊿HST:

$$HS = 2(ST)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{127^\circ}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 186



Piden x.

- Como I es incentro, entonces:

$$m\sphericalangle ABI = m\sphericalangle IBC = 34°$$

- ΔABD: isósceles $\rightarrow AB = BD = c \rightarrow ID = c - x$

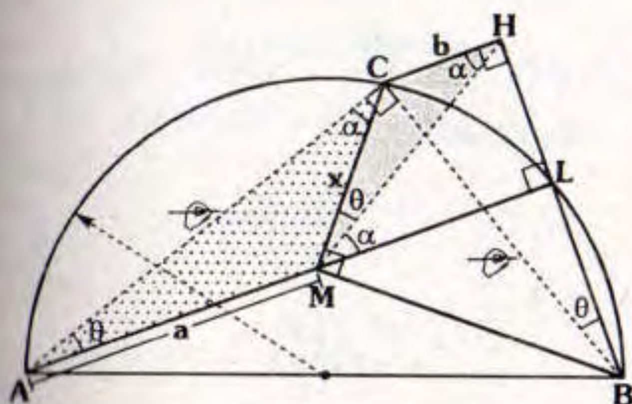
- Por teorema del incentro:

$$\frac{BI}{ID} = \frac{x}{c-x} = \frac{a+c}{b}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{c(a+c)}{a+c-b}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 187



Piden x en función de a y b.

- Completemos ángulos:

  Sea $m\sphericalangle CAM = \theta \;\Rightarrow\; m\sphericalangle CBH = \theta$

- $\triangle MCHB$: inscriptible

$$\Rightarrow \; m\sphericalangle CMH = \theta$$

- En ΔAMC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle HML = \alpha$$

- Como $\overline{ML} // \overline{CH} \;\Rightarrow\; m\sphericalangle CHM = \alpha$

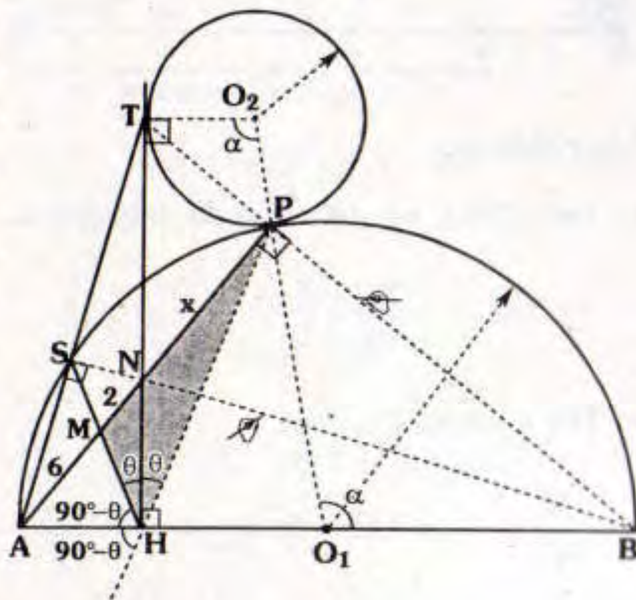
- $\Delta AMC \sim \Delta MCH$

$$\Rightarrow \; \frac{x}{b} = \frac{a}{x}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \sqrt{ab}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 188



Nos piden x.

- Como $m\widehat{TP} = m\widehat{PB} \;\Rightarrow\;$ T , P y B colineales.

- N es ortocentro del $\Delta ATB \Rightarrow$ B, N y S; colineales.

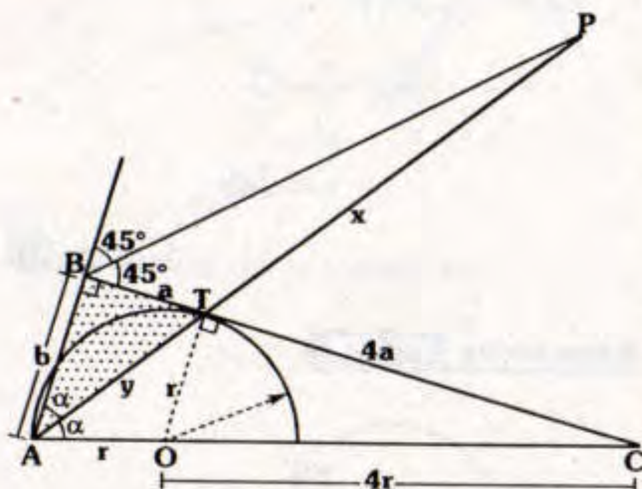
- $\triangle$SHP: triángulo órtico del $\triangle$ATB $\Rightarrow$ A, M, N y P: cuaterna armónica.

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{8+x}{6}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=4}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 189



Nos piden x/y.

- En ⊿ABT, por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{x+y}=\frac{a}{b} \qquad ...(I)$$

- Por teorema de Tales:

$$\frac{OC}{AO}=4 \Rightarrow OC=4r \Rightarrow \text{ en } ⊿OTC:$$

$$a=\frac{r\sqrt{15}}{4} \qquad ...(II)$$

- Por teorema de la bisectriz en ⊿ABT:

$$b=\frac{5r}{4} \qquad ...(III)$$

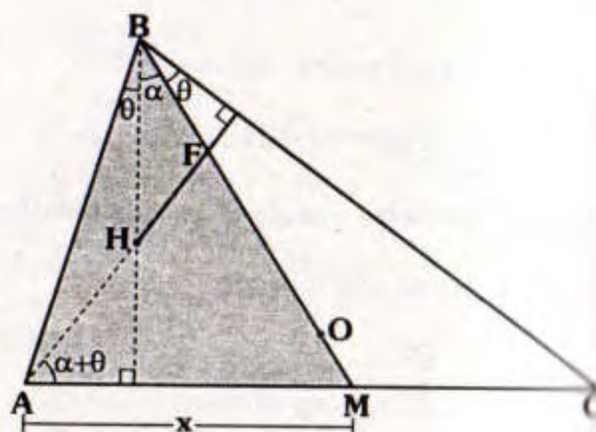
- De (I), (II) y (III):

$$\frac{x}{x+y}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{15}}{5-\sqrt{15}}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 190



Nos piden x.

- Dato: $(BM)(FM)=12$
- Por teorema de puntos notables:

$$m\measuredangle ABH = m\measuredangle OBC$$

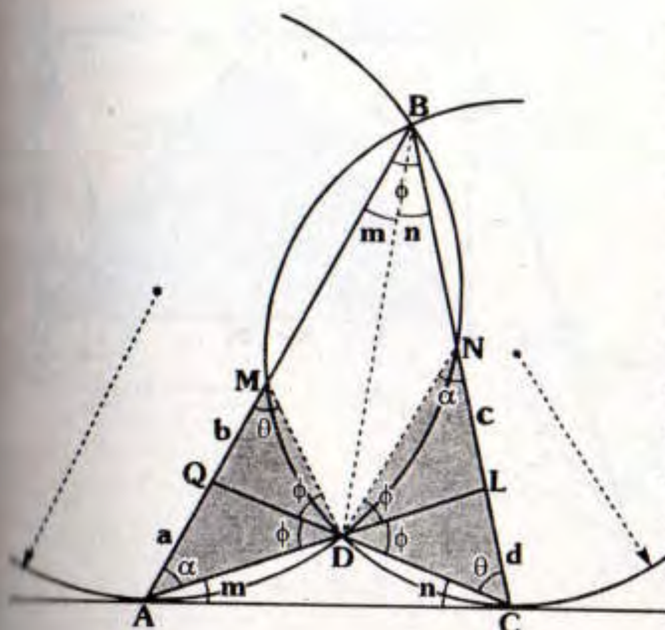
- En $\triangle$ABM:

$$x^2=\underbrace{(FM)(BM)}_{12}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=2\sqrt{3}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 191



Piden la relación entre "a, b, c y d".

- Completemos ángulos:

$$m\sphericalangle DAB = m\sphericalangle DNC = \alpha$$

$$m\sphericalangle DCB = m\sphericalangle DMA = \theta$$

- Notemos que:

$$m + n = \phi$$

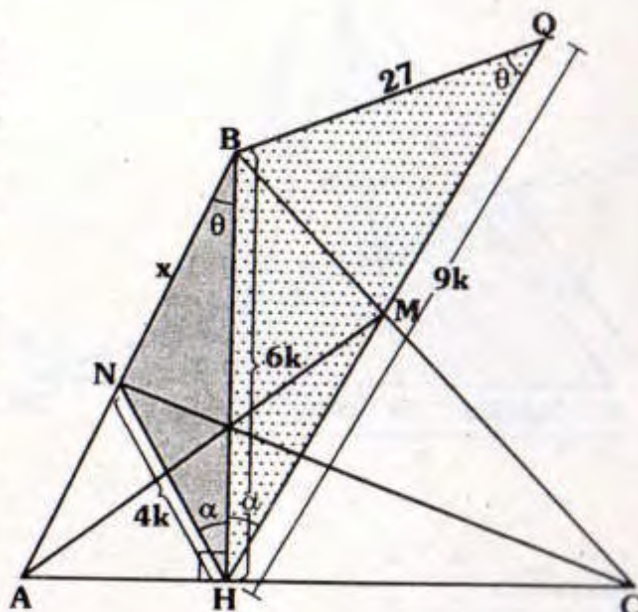
- $\triangle ADM \sim \triangle NDC$ y las líneas $\overline{DQ}$ y $\overline{DL}$ son bisectrices homólogas.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \mathbf{ad = bc}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 192



Piden x.

- Por teorema de Blanchet:

$$m\sphericalangle NHB = m\sphericalangle BHM$$

- Como:

$$\frac{NH}{HB} = \frac{HB}{HQ}$$

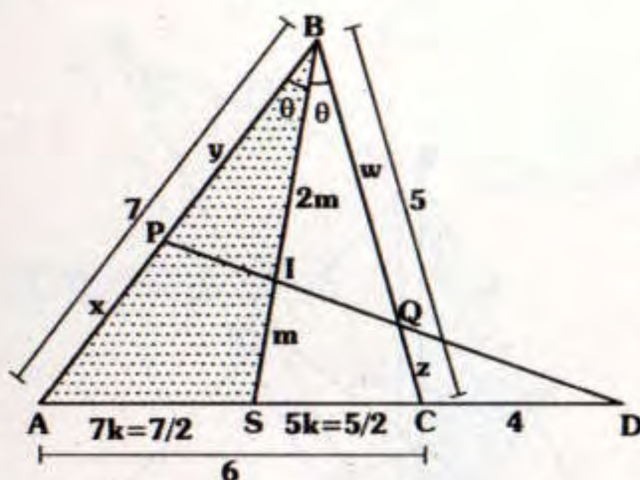
$$\Rightarrow \triangle NHB \sim \triangle BHQ \text{ (2do caso)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{27} = \frac{4\cancel{k}}{6\cancel{k}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 18}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 193



Nos piden: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{w}$

- Por teorema de la bisectriz:

$$AS=7k \quad y\ SC=5k$$

- Por teorema del incentro:

$$\frac{BI}{IS}=\frac{7+5}{6}=2$$

- Por teorema de Menelao:

* En ΔABS:

$$x(2m)\left(\frac{13}{2}\right)=y(m)(10) \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{10}{13}$$

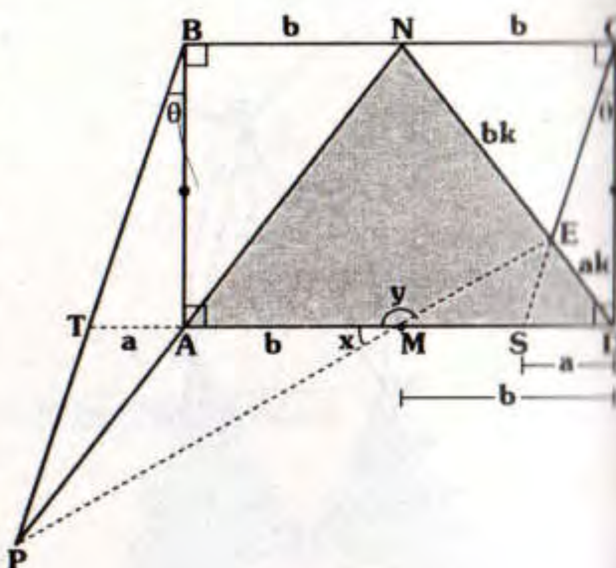
* En ΔSBC:

$$z(2m)\left(\frac{13}{2}\right)=w(m)(4) \Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{4}{13}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{14}{13}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 194



Nos piden:

$$m\sphericalangle PMA + m\sphericalangle AME$$

- $\Delta SED \sim \Delta CEN \Rightarrow ED=ak$ y $NE=bk$
- $⊿BAT \cong ⊿CDS \Rightarrow AT=SD=a$
- $⊿BNP \sim ⊿TAP \Rightarrow \dfrac{PA}{PN}=\dfrac{a}{b}$
- Notemos que en el triángulo AND se cumple:

$$\underbrace{\frac{NE}{ED}}_{\frac{bk}{ak}}\cdot\underbrace{\frac{DM}{MA}}_{\frac{b}{b}}\cdot\underbrace{\frac{AP}{NP}}_{\frac{a}{b}}=1$$

$\Rightarrow$ Como cumple el teorema de Menelao

$\Rightarrow$ P, M y E son colineales

$$\therefore \quad \mathbf{x+y=180^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 195

Piden x/y en función de a y b.

- Luego de completar ángulos, verificamos:

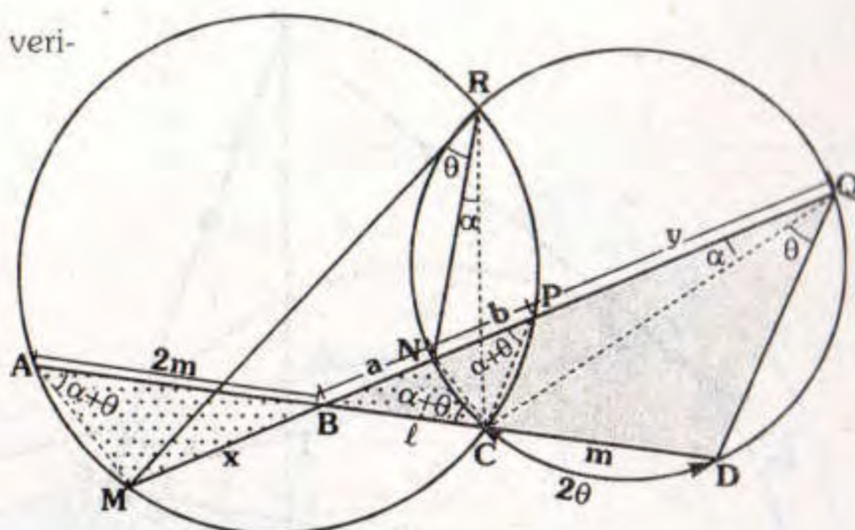
$\overline{AM}//\overline{NC}$ y $\overline{CP}//\overline{DQ}$

- Por teorema de Tales:

$* \ \dfrac{x}{a} = \dfrac{2m}{\ell}$

$* \ \dfrac{a+b}{y} = \dfrac{\ell}{m}$

$\therefore \quad \mathbf{\dfrac{x}{y} = \dfrac{2a}{a+b}}$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 196

- Piden xy/ab
- Por propiedad de circunferencia:

$m\widehat{BNS} = m\widehat{BHQ}$

$\Rightarrow m\sphericalangle BPS = m\sphericalangle BQC = \phi$

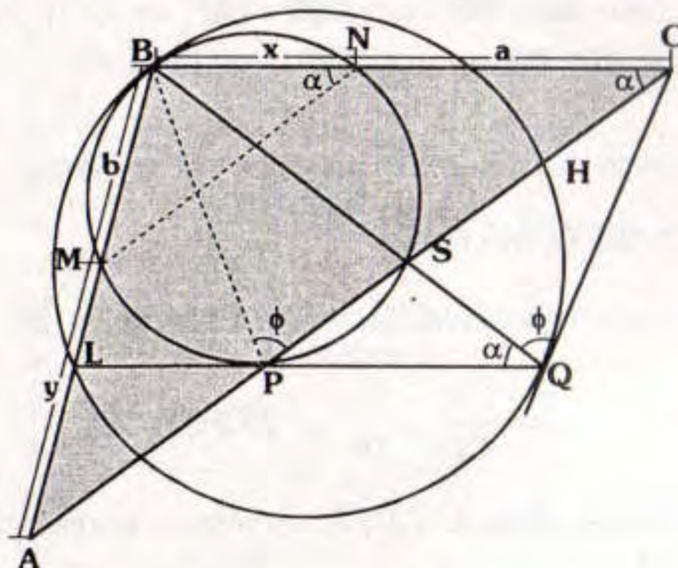
$\Rightarrow$ ⏢BPQC es inscriptible

- Como $m\widehat{MB} = m\widehat{LB}$

$\Rightarrow m\sphericalangle LQB = m\sphericalangle MNB = \alpha$

- Como ⏢BPQC es inscriptible

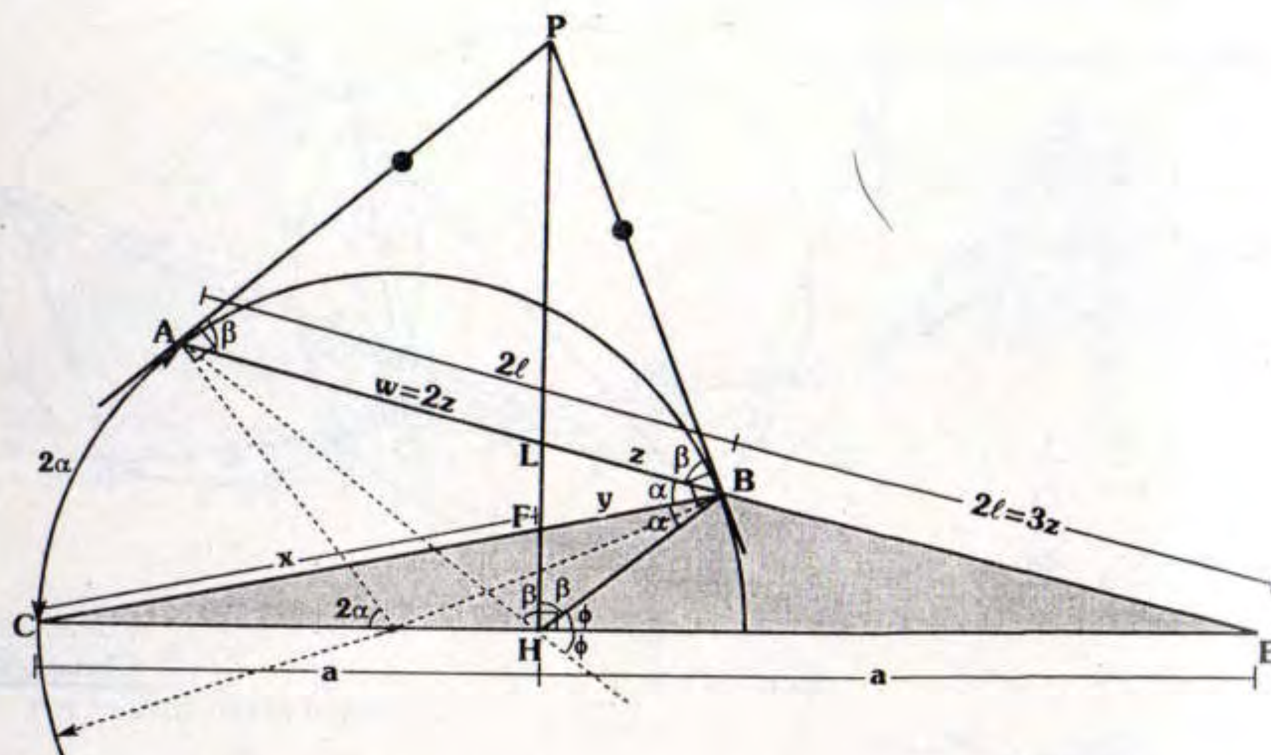
$\Rightarrow m\sphericalangle PQB = m\sphericalangle PCB = \alpha$



- Luego: $\overline{MN}//\overline{AC} \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{y}$ $\quad \therefore \quad \mathbf{\dfrac{xy}{ab} = 1}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 197



Nos piden: x/y.

- Como m∢OAP = m∢OBP = 90° ⇒ O, A, P, B y H son puntos concíclicos, debido a que AP=PB ⇒ m∢AHP = m∢PHB = β

- Luego A, L, B y E es una cuaterna armónica ⇒ $\frac{w}{z}=\frac{4\ell}{2\ell}$ ⇒ w = 2z

- ⌓ABHO: inscriptible

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle COA = m\sphericalangle ABH = 2\alpha \Rightarrow \overline{BC} \text{ es bisectriz exterior del } \triangle HBE$$

$$\Rightarrow \ \frac{CH}{CE}=\frac{\ell}{2\ell} \Rightarrow 2(CH)=CE$$

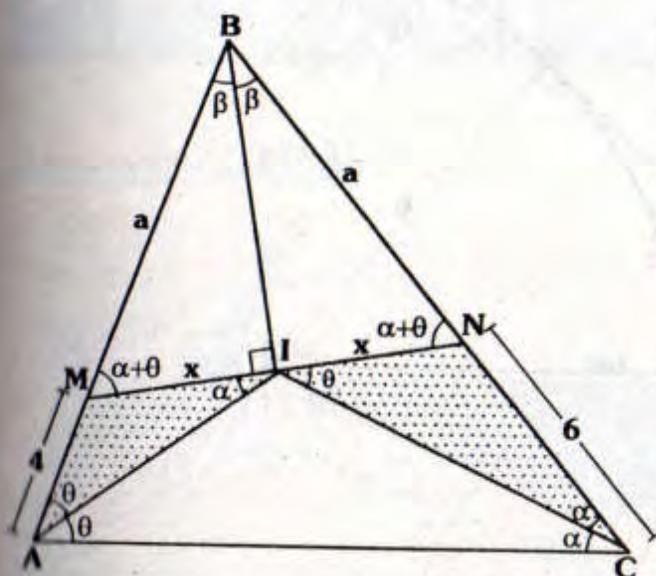
- Finalmente en el △CBE, usemos el teorema de Menelao ($\overleftrightarrow{HFL}$ es la recta secante):

$$x(z)(a)=(a)(y)(4z)$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y}=4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 198



Piden MN.

- Notemos que el ΔMBN es isósceles:

$$\Rightarrow MI = IN = x$$

- En ⊿AMNC:

$$m\sphericalangle BMN = m\sphericalangle MNB = \frac{2\theta + 2\alpha}{2} = \theta + \alpha$$

- Luego: $\Delta AMI \sim \Delta INC$

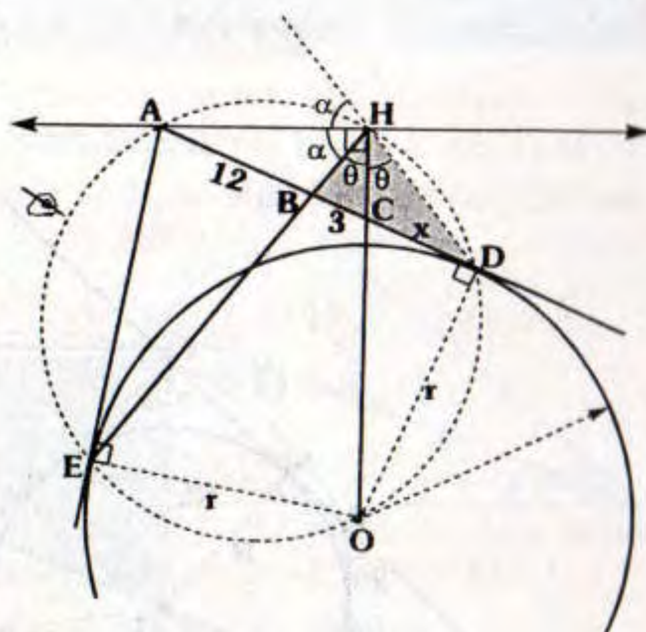
$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \quad \mathbf{MN = 4\sqrt{6}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 199



Nos piden x.

- Como:

$$m\sphericalangle OEA = m\sphericalangle ODA = 90°$$

$\Rightarrow$ O, D, H, A y E son concíclicos, debido a que OE = OD

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle DHO = m\sphericalangle OHE$$

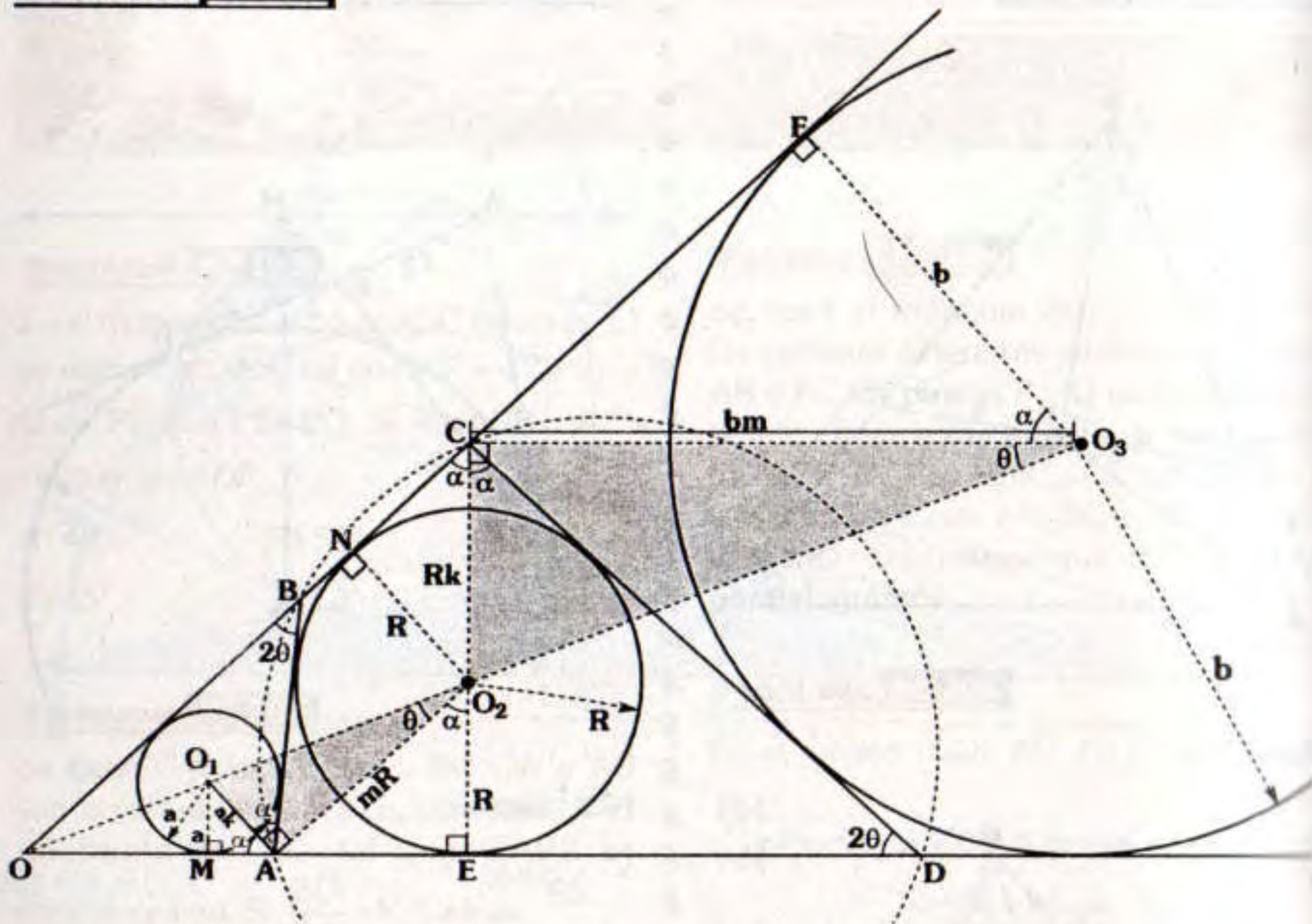
- Luego D, C, B y A constituyen una cuaterna armónica.

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{15 + x}{12}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 5}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 200



Piden R en función de a y b.

- Como el $\triangle$ABCD es bicéntrico (es decir es inscrito y circunscrito)

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle OAB = m\sphericalangle BCD = 2\alpha \text{ y}$$

$$m\sphericalangle ADC = m\sphericalangle ABO = 2\theta$$

- $\triangle O_1MA \sim \triangle O_2NC \quad \Rightarrow O_1A = ak \text{ y } O_2C = Rk$

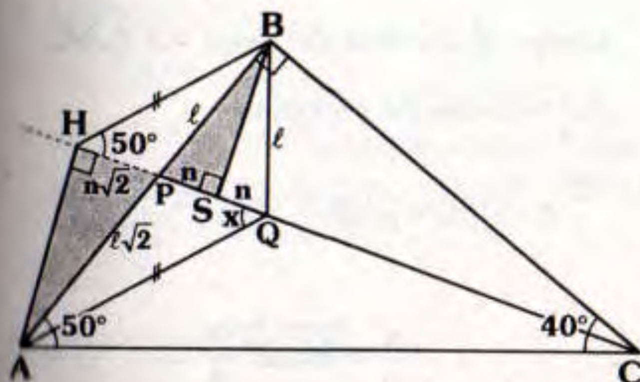
- $\triangle O_2EA \sim \triangle O_3FC \quad \Rightarrow O_3C = bm \text{ y } O_2A = mR$

- $\triangle O_1AO_2 \sim \triangle O_2CO_3 \Rightarrow \dfrac{a\cancel{k}}{R\cancel{k}} = \dfrac{\cancel{m}R}{b\cancel{m}}$

$$\therefore \quad \mathbf{R = \sqrt{ab}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 201



Nos piden x.

- Prolonguemos $\overline{CP}$ y tracemos $\overline{AH} \perp \overleftrightarrow{CP}$ (H en $\overleftrightarrow{CP}$)
- Como ⌂AHBC es inscriptible

$$\Rightarrow \ m\measuredangle BHC = 50°$$

- En $\triangle PBQ$ se traza la altura $\overline{BS}$

$$\Rightarrow \ PS = SQ$$

- Por teorema de Tales:
- Como: $\overline{AH} // \overline{BS}$

$$\Rightarrow \ \frac{PH}{PS} = \sqrt{2}$$

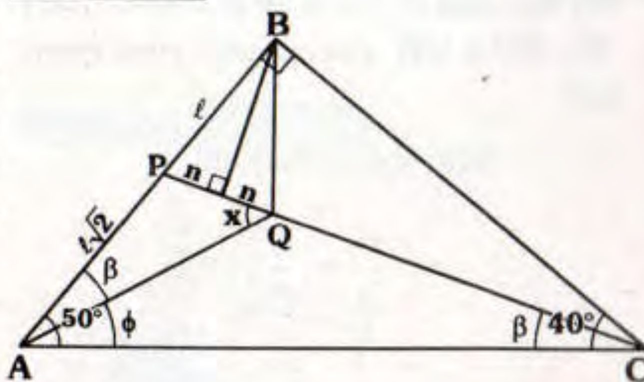
- Debido a que:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{QP}{PH} \Rightarrow \overline{HB} // \overline{AQ}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 50°}$$

Clave B

Otra forma:



Nos piden x.

- En ⊿PBC: $\ell^2 = (PS)(PC)$

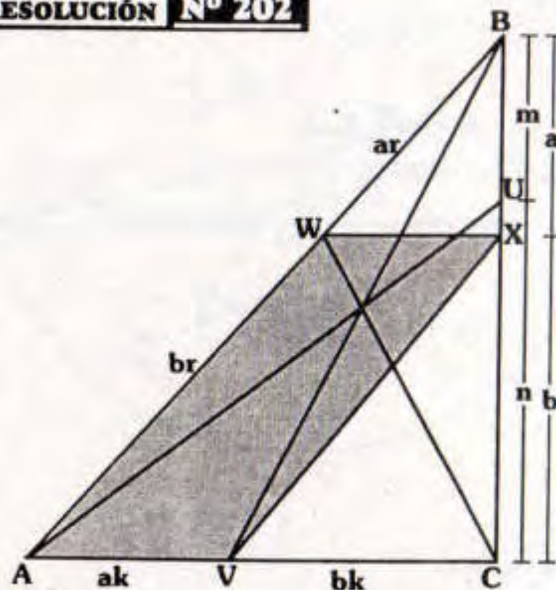
$$\underbrace{2\ell^2} = \underbrace{2(PS)}(PC)$$

$$\left(\ell\sqrt{2}\right)^2 = (PQ)(PC)$$

- En $\triangle APC$: $m\measuredangle PAQ = m\measuredangle ACP = \beta$
- Como $x = \beta + \phi$

$$\therefore \ \mathbf{x = 50°}$$

RESOLUCIÓN Nº 202



Nos piden $\frac{a}{b}$; dato: $\frac{m}{n}=k$

- Como AWXV es un paralelogramo:

  AW=br; WB=ar; AV=ak y VC=bk

- Por teorema de Ceva en el ΔABC (*pues* $\overline{AU}$, $\overline{BV}$ *y* $\overline{CW}$ *son cevianas concurrentes*):

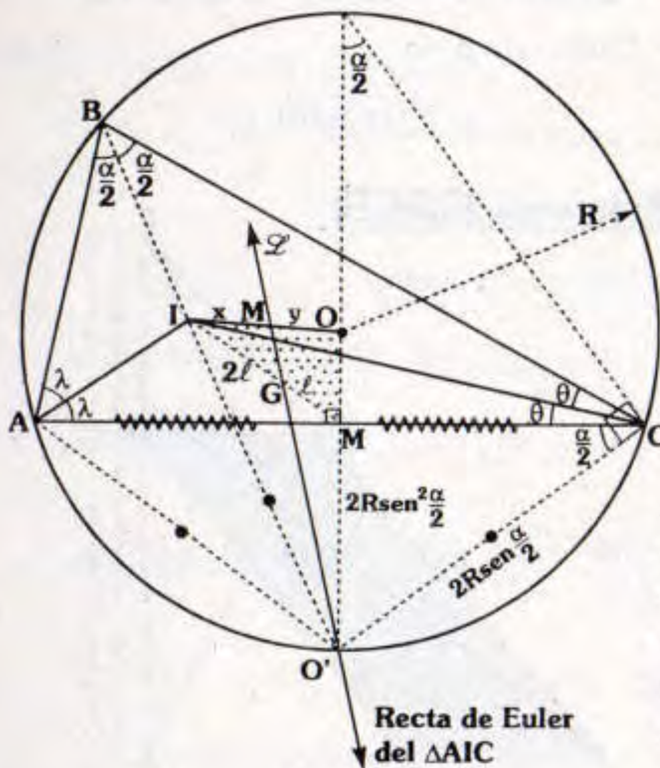
$$m(br)(bk)=n(ar)(ak)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{m}{n}}_{k}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{a}{b}=\sqrt{k}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 203



Nos piden: $\frac{x}{y}$ en función de α.

- Por propiedad O'A=O'I=O'C $\Rightarrow$ O' es circuncentro del ΔAIC

- Como AM=MC $\Rightarrow$ $\overline{IM}$ es mediana del ΔAIC, ubicamos G baricentro de dicho triángulo (IG=2(GM)).

- Luego $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es recta de Euler del ΔAIC.

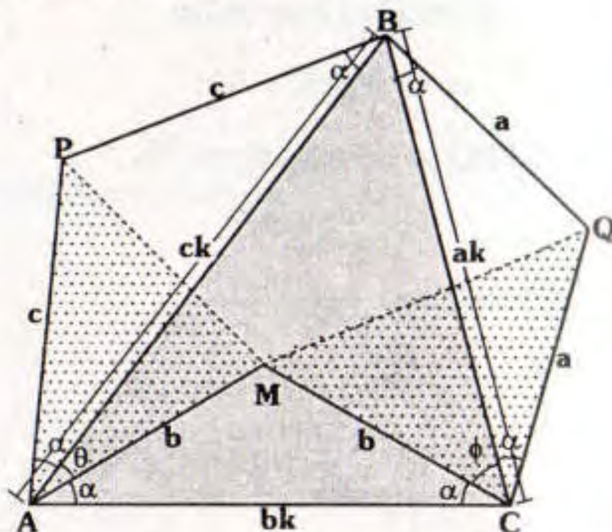
- Por teorema de Menelao:

$$(x)(\ell)(R)=(y)(2\ell)\left(2Rsen^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y}=4sen^2\frac{\alpha}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 204



Piden demostrar que MPBQ es un paralelogramo.

- Como los Δs APB, BQC y AMC son semejantes, entonces:

  Sea AP=PB=c; BQ=QC=a y AM=MC=b

$\Rightarrow$ AB=ck; BC=ak y AC=bk

- Notamos $\Delta MAP \sim \Delta CAB$

Pues $\frac{PA}{AM} = \frac{BA}{AC}$ y $m\measuredangle MAP = m\measuredangle CAB$

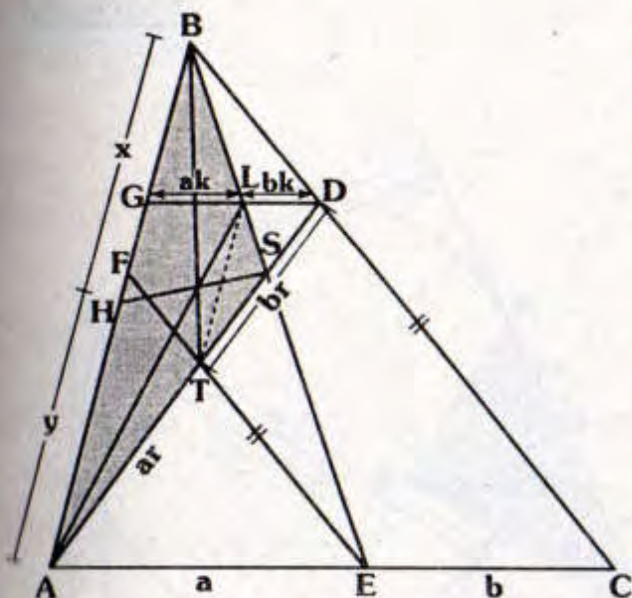
$\Rightarrow$ MP=a

- Análogamente:

$\Delta QCM \sim \Delta BCA \Rightarrow MQ = c$

- Como los lados opuestos del cuadrilátero MPBQ son iguales entonces MPBQ es un paralelogramo.

RESOLUCIÓN Nº 205



Nos piden $\frac{x}{y}$.

- Por teorema de Tales:

AT=ar y TD=br

- Por propiedad de semejanza:

GL=ak y LD=bk $\Rightarrow$ $\overline{AB} // \overline{TL}$

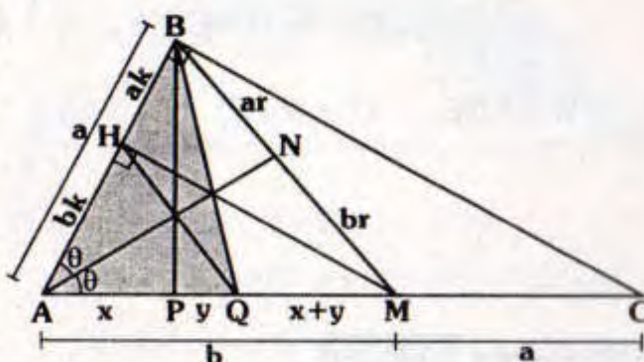
- En ΔASB, por teorema de Ceva:

x=y

$\therefore \quad \frac{x}{y} = 1$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 206



Nos piden AP/PQ.

- Sea AB=MC=a y AM=b, entonces:

AH=bk ; HB=ak ; BN=ar y NM=br

- En ΔABM, por teorema de Ceva:

(AQ)akbr=(MQ)arbr

$\Rightarrow$ AQ=MQ

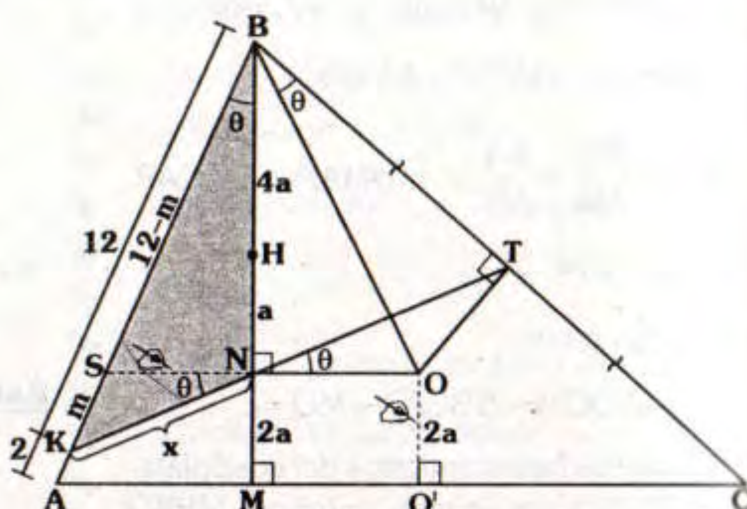
- Como A, P, Q y M constituyen una cuaterna armónica:

$\frac{x}{y} = \frac{2\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}}$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = 2$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 207



Nos piden x.

- Por propiedad $BH = 2\underbrace{(OO')}_{2a} = 4a$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{12-m}{m+2} = \frac{5\cancel{a}}{2\cancel{a}} \Rightarrow m = 2$$

- ◻NBTO: inscriptible

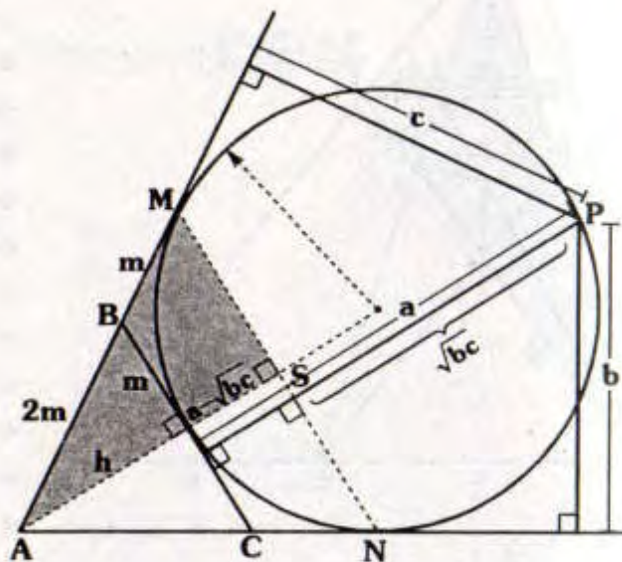
$$\Rightarrow m\measuredangle ONT = m\measuredangle OBC = \theta$$

- En ΔKNB: $x^2 = (2)(12)$

$$\therefore \; \mathbf{x = 2\sqrt{6}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 208



Nos piden $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

- Por propiedad de semejanza:

$$(PS)^2 = bc \;\rightarrow\; PS = \sqrt{bc}$$

- Por propiedad del ángulo equilátero:

$$b + c - a = h$$

- ⊿ATB ~ ⊿ASM

$$\frac{h}{a-\sqrt{bc}} = \frac{2\cancel{m}}{\cancel{m}}$$

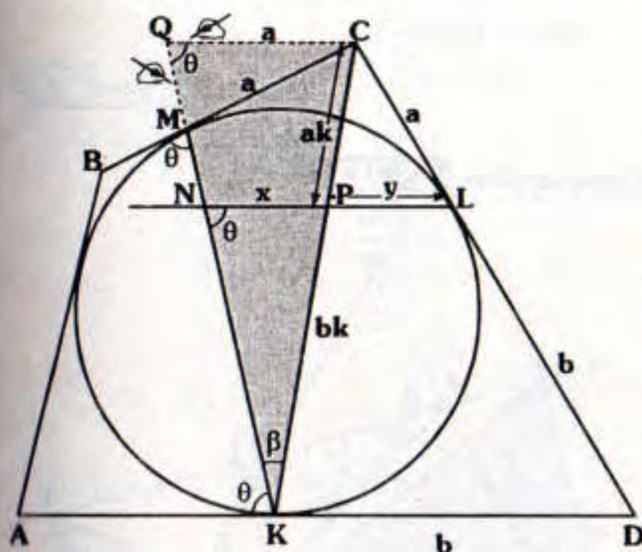
$$b + c - a = 2\left(a - \sqrt{bc}\right) \;\Rightarrow\; \underbrace{b + c + 2\sqrt{bc}} = 3a$$

$$\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 = 3a$$

$$\therefore \; \mathbf{\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = \sqrt{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 209



Por demostrar: x=y

• $\triangle KCD \sim \triangle PCL$

$$\Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow y = \frac{ab}{a+b} \qquad ...(I)$$

• Se traza la paralela por C a $\overline{AD}$ que corta a la prolongación de $\overline{KM}$ en Q.

• $\triangle KNP \sim \triangle KQC$

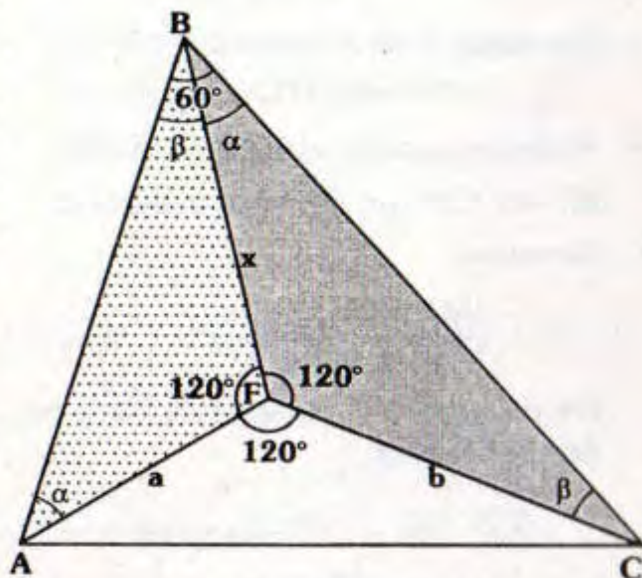
$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{bk}{(a+b)k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ab}{a+b} \qquad ...(II)$$

• De (I) y (II) se concluye que:

$$\therefore \mathbf{x = y}$$

RESOLUCIÓN Nº 210



Nos piden x, en función de a y b.

• Como F es punto de Fermat, entonces:

$$m\measuredangle AFB = m\measuredangle BFC = m\measuredangle CFA = 120°$$

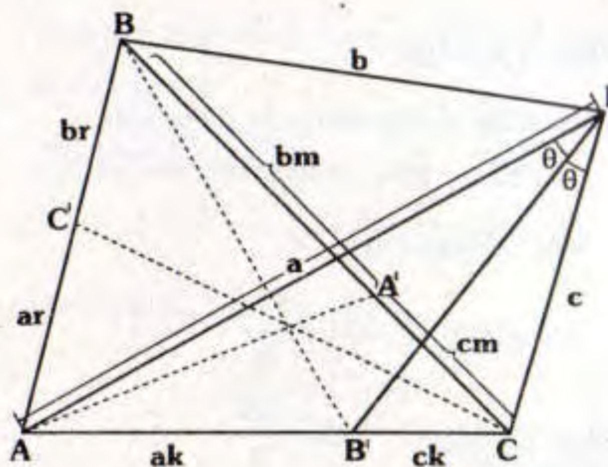
• Notamos que $\triangle AFB \sim \triangle BFC$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

$$\therefore \mathbf{x = \sqrt{ab}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 211



Nos piden analizar las líneas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$

- Por teorema de la bisectriz en ΔAIC:

  AB'=ak y B'C=ck

- Análogamente en el ΔBIC y ΔAIB:

  BC'=br; C'A=ar; BA'=bm y A'C=cm

- Notemos:

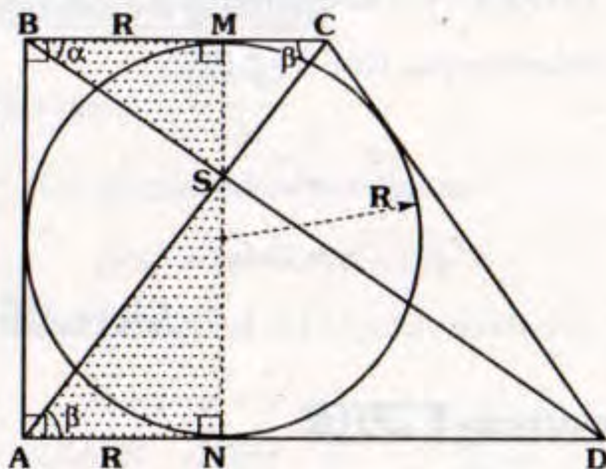
$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

Por recíproco del teorema de Ceva podemos concluir:

$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 212



Piden: $tg\alpha+tg\beta$

- Usemos el teorema de Newton:

  $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{MN}$ concurren en S.

- $\overline{MN}$: diámetro

- En ⊿BMS: $tg\alpha=\dfrac{SM}{R}$

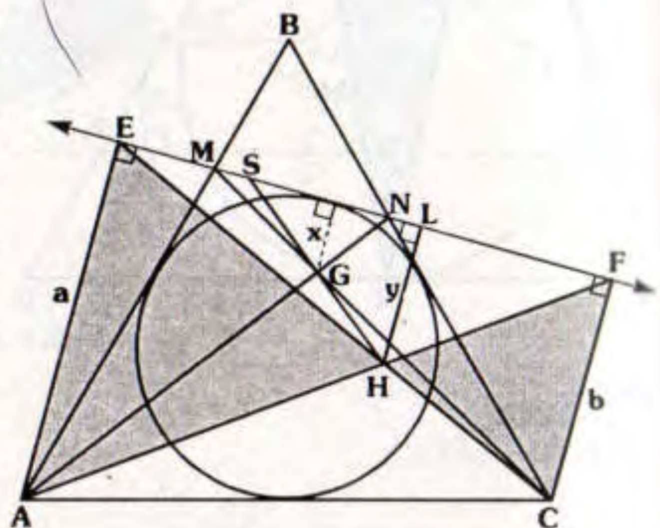
- En ⊿ANS: $tg\beta=\dfrac{SN}{R}$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{SM+SN}{R}=\frac{MN}{R}=\frac{2R}{R}$$

$\therefore$ $\mathbf{tg\alpha+tg\beta=2}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 213



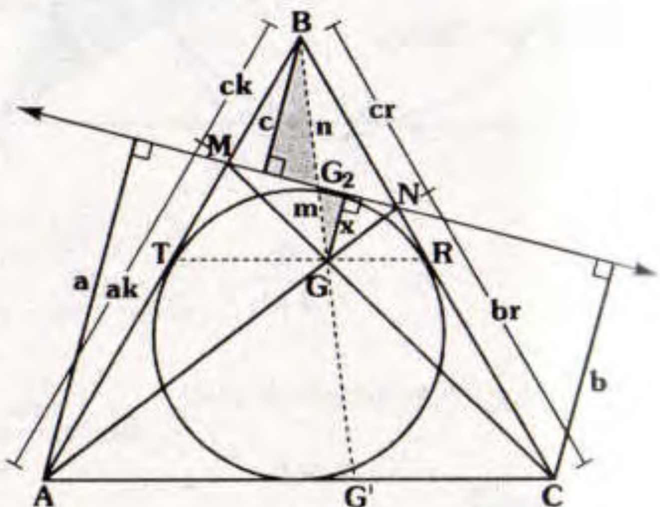
Por demostrar: HG=GS

- HG=GS $\Leftrightarrow$ y=2x.

  Demostremos y=2x

- Sea AE=a y FC=b

$$\Rightarrow\ y=\frac{ab}{a+b}\qquad ...(I)$$



- Por teorema de Newton:

$$\overline{AN},\ \overline{CM}\ y\ \overline{TR}\ \text{concurren}$$

- $\overline{TR}$ es base media $\Rightarrow$ BG=GG'
- Por teorema de Van Aubel:

$$\frac{c\not{k}}{a\not{k}}+\frac{c\not{t}}{b\not{t}}=\frac{BG}{GG'}=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{c}{a}+\frac{c}{b}=1\ \Rightarrow\ c=\frac{ab}{a+b}\quad ...(II)$$

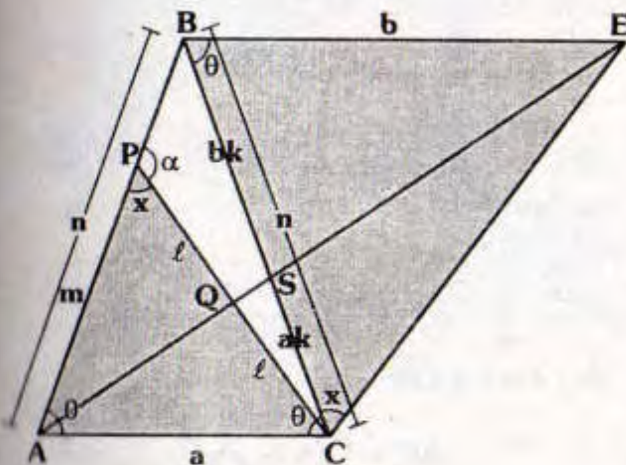
- B, G_2, G y G': cuaterna armónica

$$\Rightarrow\ \frac{n}{m}=\frac{2(m+n)}{m+n}\ \Rightarrow\ n=2m$$

- $\frac{x}{m}=\frac{c}{n}\ \Rightarrow\ x=\frac{c}{2}\quad ...(III)$
- De (I), (II) y (III): y=2x

$$\therefore\ \mathbf{HG=GS}$$

RESOLUCIÓN Nº 214



Piden x en función de α.

- Sea AC=a y BE=b $\Rightarrow$ como: $\Delta ASC\sim\Delta ESB \Rightarrow CS=ak$ y $BS=bk$
- En ΔPBC, usemos el teorema de Menelao ($\overleftrightarrow{SQA}$ es la recta secante):

$$(n)(\ell)(ak)=(\ell)(bk)(m)$$

$$\Rightarrow\ \frac{n}{b}=\frac{m}{a}$$

- Como: $m\measuredangle PAC=m\measuredangle CPE$

$$\Rightarrow\ \Delta PAC\sim\Delta CBE$$

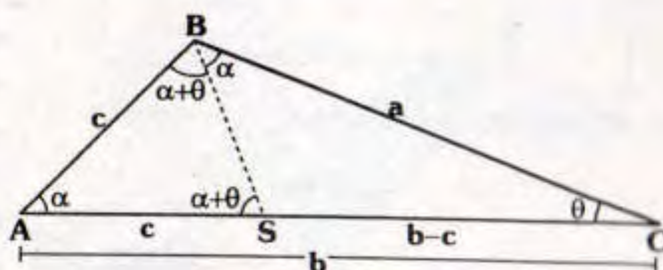
$$\Rightarrow\ m\measuredangle APC=m\measuredangle BCE$$

- Como $x+\alpha=180°$

$$\therefore\ \mathbf{x=180°}-\alpha$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 215



Nos piden la relación entre a, b y c.

Dato: $3\alpha+2\theta=180°$

- Se traza la ceviana interior BS, tal que: $m\measuredangle CBS=\alpha$
- Luego observamos:

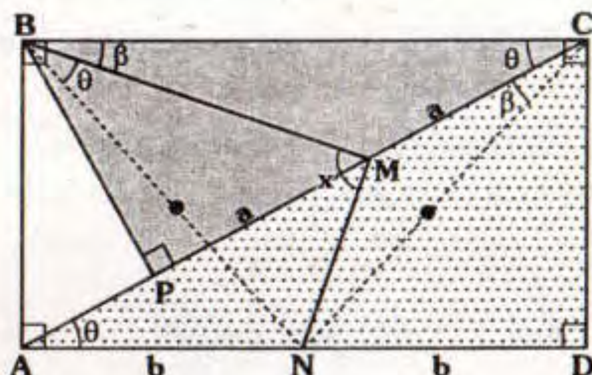
$$m\measuredangle ASB=m\measuredangle ABS=\alpha+\theta$$

- En ΔABC: $a^2=(b-c)b$

$$\therefore\ \mathbf{a^2=b^2-bc}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 216



Nos piden x.

- Verificamos que: $\triangle ADC \sim \triangle CPB$
- Como $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son medianas homólogas $\Rightarrow$ $m\measuredangle ACN = m\measuredangle CBM$
- Como NB=NC

$$\Rightarrow m\measuredangle NCB = m\measuredangle NBC$$

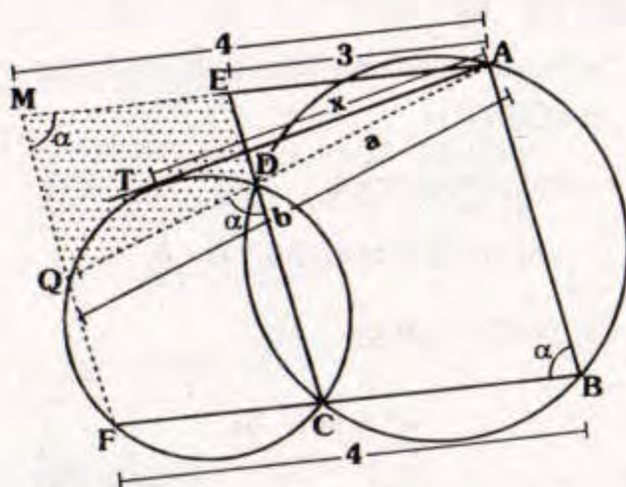
$$\Rightarrow m\measuredangle NBM = \theta$$

- $\triangle$ABMN: inscriptible

$$\therefore \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 217



Piden x.

- Se traza la secante ADQ
- Por teorema: $x^2 = ab$
- Se sabe: $\overline{FQ}//\overline{BA}$ por dato $\overleftrightarrow{AE}//\overleftrightarrow{FB} \Rightarrow$ FMAB es un paralelogramo

$$\Rightarrow AM=4$$

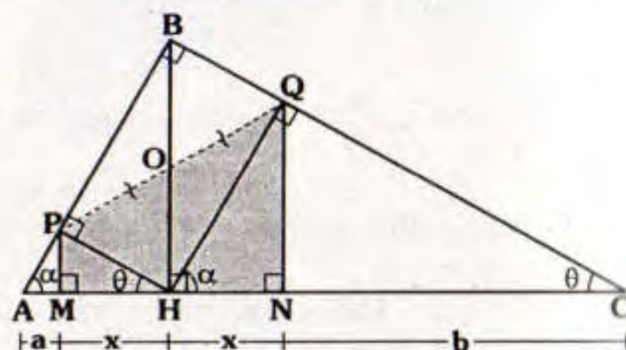
- $\triangle$QMED: inscriptible

$$\Rightarrow ab=(3)(4)$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 2\sqrt{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 218



Nos piden "AC" en función de a y b.

- Notamos que MPQN es un trapecio, cuya base media es $\overline{OH}$

$$\Rightarrow MH=HN=x$$

- $\triangle APH \sim \triangle HQC$, $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son alturas homólogas

$$\Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{x}{b} \Rightarrow x=\sqrt{ab}$$

- $AC = a + 2\sqrt{ab} + b$

$$\therefore \ \mathbf{AC = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 219

Nos piden x en función de a, b y c

- Por propiedad:

$DF=FQ,\ DS=\sqrt{ab}$ y $QT=\sqrt{bc}$

- En el trapecio DSTQ, por base media:

$$x=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 220

Piden el menor valor de x.

- Notamos que:

⌂BMDP es un cuadrilátero inscriptible

$\Rightarrow\ m\measuredangle MDP=90°$

- $\triangle MAD\cong\triangle DCP$:

$\Rightarrow\ MA=CP=6-x$

- $\triangle LCP\sim\triangle MBP$:

$$\frac{1}{6-x}=\frac{x}{12-x}\ \Rightarrow\ x=3\ \text{ o }\ x=4$$

$$\therefore\quad \mathbf{x_{mín}=3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 221

Piden x.

- Se traza:

$\overline{LS}\perp\overleftrightarrow{BA}$ (S en $\overleftrightarrow{BA}$) ⇒ S, D y E son colineales y se encuentran en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (recta de Simson)

- Verificamos rápidamente que:

$\Delta LBA\sim\Delta LED$

- Como $\overline{LM}$ y $\overline{LN}$ son medianas homólogas

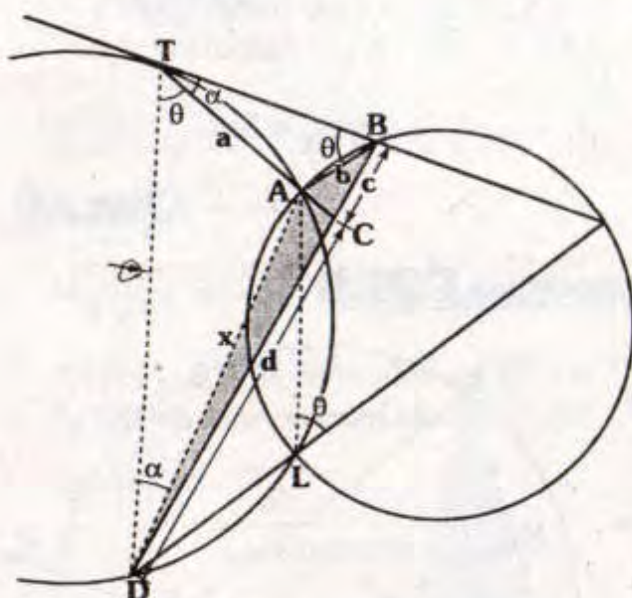
$\Rightarrow\ m\measuredangle AML=m\measuredangle DNL$

$\Rightarrow$ △LSMN: inscriptible

$$\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 222



Nos piden la relación entre "a, b, c y d".

- Al completar ángulos, verificamos:

$$m\measuredangle DAC = m\measuredangle CAB = \alpha + \theta$$

$\Rightarrow$ $\overline{AC}$ es bisectriz interior del △DAB

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{b} = \frac{d}{c} \qquad ...(I)$$

- △DTA ~ △TAB:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{a}{b} \qquad ...(II)$$

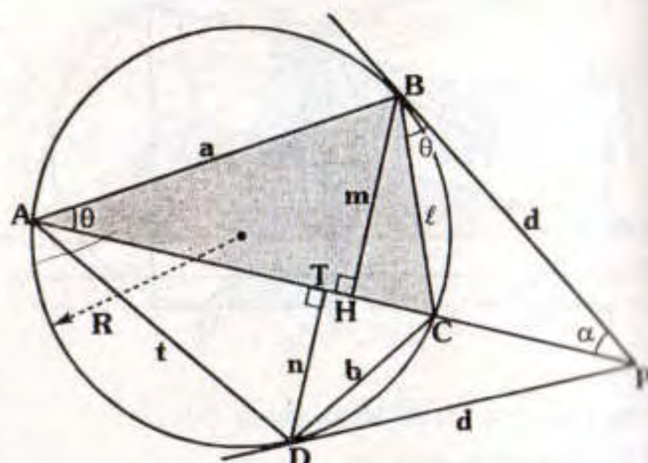
- De (I) y (II):

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{d}{c}$$

$$\therefore \quad \mathbf{ca^2 = db^2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 223



Piden R.

Datos: $ab = \sqrt{k}$ y $mn = k$

- Como △ABP ~ △BCP

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\ell} = \frac{d}{CP} \qquad ...(I)$$

- Análogamente: △ADP ~ △DCP

$$\frac{t}{b} = \frac{d}{CP} \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II): $ab = \ell t$ ...(III)
- Por teorema del producto de lados:

* En △ABC: $a\ell = 2mR$
* En △ADC: $bt = 2nR$

$$\Rightarrow \quad (ab)(\ell t) = 4mnR^2 \qquad ...(IV)$$

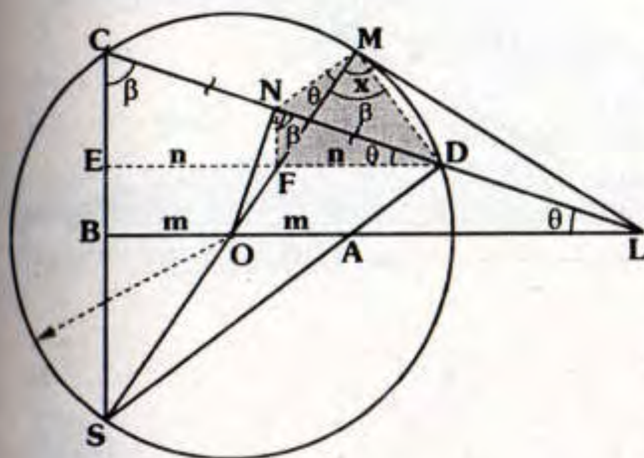
- De (III) y (IV):

$$(ab)^2 = 2(mn)R^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{R = \frac{1}{2} = 0,5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 224



Nos piden x.

- Se ubica E en $\overline{BC}$ tal que:

  $\overline{DE}//\overline{AB} \Rightarrow$ en ΔSDE: EF=FD

- Se traza $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ (N en $\overline{CD}$)

  $\Rightarrow$ CN=ND

- En ΔECD: $\overline{FN}$ es base media

  $\Rightarrow \overline{EC}//\overline{FN}$, luego:

  $m\measuredangle ECD = m\measuredangle FND = \beta$

- ⌂FNMD: inscriptible

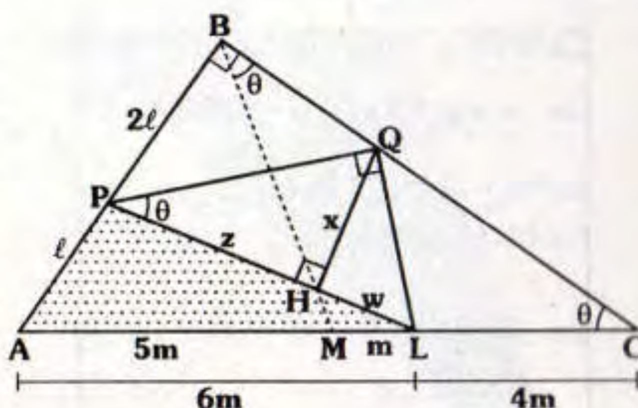
  $\Rightarrow \quad m\measuredangle NMF = m\measuredangle NDF = \theta$

- ⌂ONML: inscriptible

  $\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 225



Piden x, dato: PL=13 y 2(AL)=3(LC)

- En ⊿PQL:

  $$x^2 = zw$$

- Como ⌂PBQH es inscriptible

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle HBQ = \theta$

  entonces al prolongar $\overline{BH}$, corta en M a $\overline{AC}$, entonces $\overline{BM}$ es mediana

- AM=MC, sea:

  AL=6m $\Rightarrow$ LC=4m (dato) $\Rightarrow$ ML=m

- En ΔALP, por teorema de Menelao

  $$(m)(z)(3\ell) = (5m)(w)(2\ell)$$

  $$\Rightarrow 3z = 10w$$

- Como PL=13 $\Rightarrow$ z=10 y w=3

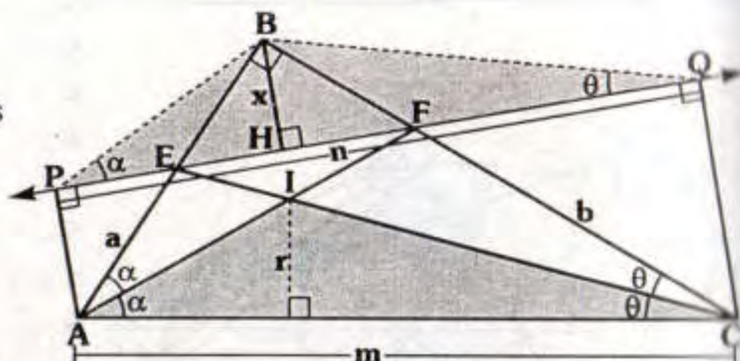
- En ⊿PQL: $x^2 = (10)(3)$

  $\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{30}}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 226

Piden x en función de a, b y k.



- ⌂APBF y ⌂EBQC son inscriptibles

  $\Rightarrow\ m\measuredangle BPQ=\alpha\ \text{ y }\ m\measuredangle BQP=\theta$

- $\Delta PBQ\sim\Delta AIC$ ($\overline{BH}$ e $\overline{IT}$ son alturas homólogas)

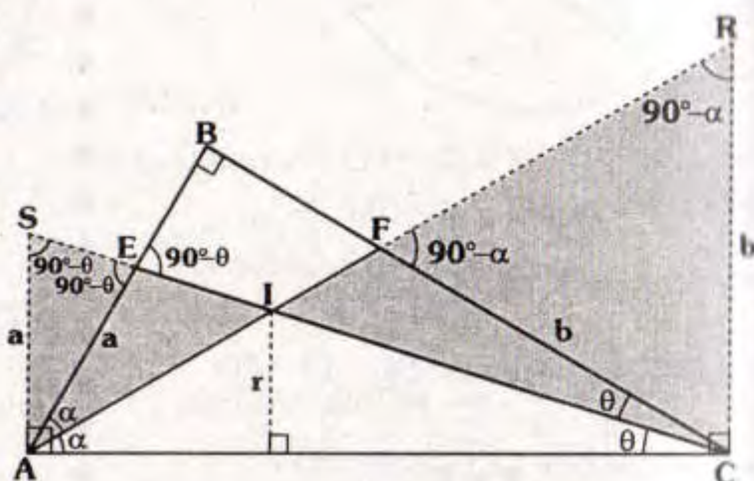
  $\Rightarrow\ \dfrac{x}{r}=\boxed{\dfrac{n}{m}}_{\to k}\ \Rightarrow\ x=rk \qquad ...(I)$

- Hallemos ahora "r" en función de "a y b".

- ΔEAS y ΔFCR: isósceles $\Rightarrow$ AS=a y RC=b, por propiedad:

$$\Rightarrow\ r=\frac{ab}{a+b}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{kab}{a+b}}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 227

Piden x.

- ΔECT: isósceles $\Rightarrow$ EC=CT=3

- Por teorema de pitágoras, en ⊿OTC:

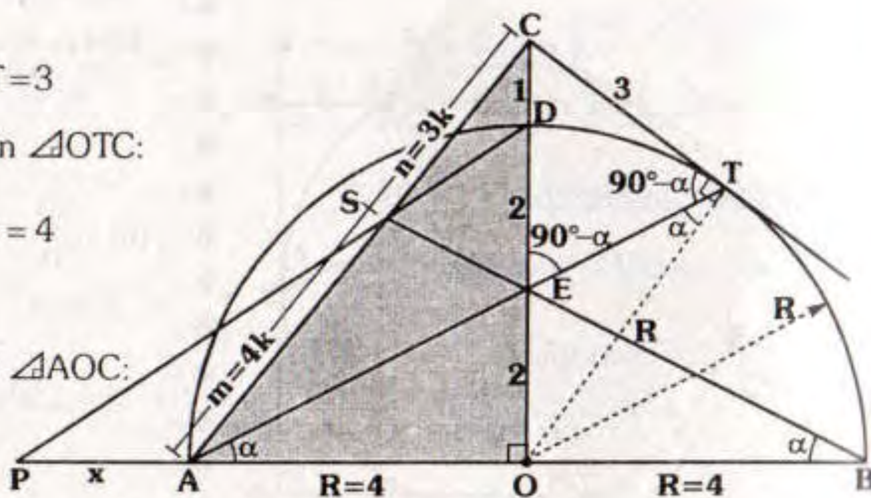
$$R^2+3^2=(R+1)^2\ \Rightarrow\ R=4$$

- Luego: OE=2

- Por teorema de Menelao en ⊿AOC:

  * $\overleftrightarrow{SEB}$: recta secante

$$\Rightarrow\ m(3)(4)=n(2)(8)\ \Rightarrow\ \frac{m}{n}=\frac{4}{3}$$



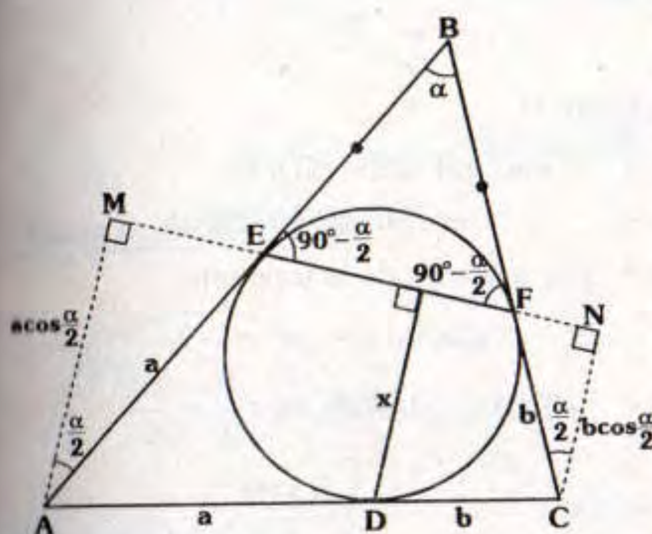
* $\overleftrightarrow{PSD}$: recta secante

$$\Rightarrow\ (4)(3\cancel{\ell})\cdot x = 1(4\cancel{\ell})(x+4)$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 228



Piden x en función de a, b y α.

- Se trazan $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ perpendiculares a la recta $\overline{EF}$.

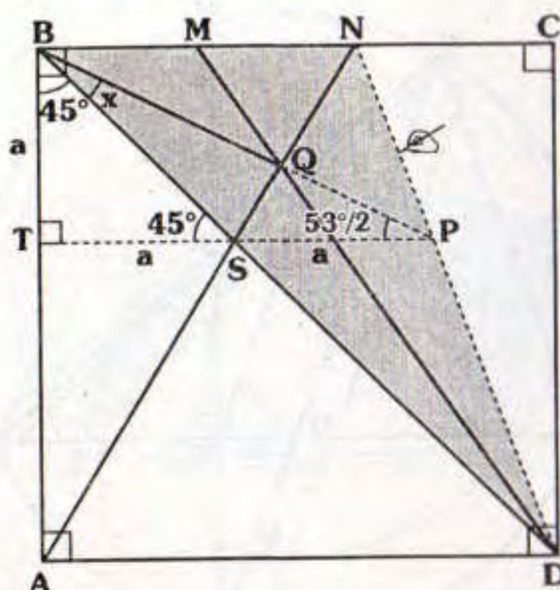
- En el trapecio AMNC:

$$x = \frac{\left(a\cos\frac{\alpha}{2}\right)(b) + \left(b\cos\frac{\alpha}{2}\right)a}{a+b}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 229



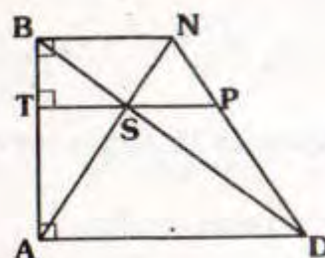
Piden x.

- En $\triangle$BDN: por teorema de Ceva

$$\overline{SP}//\overline{BN}$$

- Luego: $\overline{PS} \perp \overline{BA}$

- En el trapecio ABND:



Se cumple TS=SP

- Luego: $\triangle$BTP: notable de $\frac{53°}{2}$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{37°}{2} = 18°30'}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 230

Piden x.

Dato: ab=54

- Al completar ángulos notamos que $\overline{LB}//\overline{NM}$

- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{a}=\frac{m}{n} \qquad ...(I)$$

- Por teorema de Menelao, en el $\triangle$HBC:

($\overleftrightarrow{NLF}$ *es la recta secante*)

$$(\ell)(n)(b)=(\ell)(m)(12) \Rightarrow \frac{b}{12}=\frac{m}{n} \; ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{12} \Rightarrow x=\frac{ab}{12}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=4,5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 231

Piden R.

- Como ⊿ECM~⊿DFM

$\Rightarrow$ MD=3a y EM=a

- Por teorema de la tangente:

$$(3a)^2=a\ell \Rightarrow \ell=9a$$

- ⊿ECM~⊿ABM $\Rightarrow \dfrac{R}{1}=\dfrac{9a}{a}$

$$\therefore \quad \mathbf{R=9}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 232

Piden x.

- Del dato: $3(BH)+3(AH)=5(BS)$

$\Rightarrow\ 3(AB)=5(BS)\ \Rightarrow\ AB=5k$ y $BS=3k$

- Como $\Rightarrow\ m\measuredangle MPT=m\measuredangle NTP$

$\Rightarrow\ m\measuredangle KBA=m\measuredangle ABR\Rightarrow\ BE=BF=6$

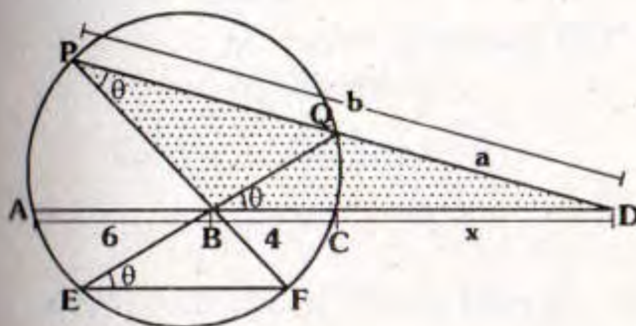
- En el trapecio ANRB:

$$x=\frac{5(3k)+11(2k)}{2k+3k}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{37}{5}=7,4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 233



Piden x.

- Sea $m\measuredangle FEQ=\theta\ \Rightarrow\ m\measuredangle FPQ=\theta$
- Como $\overline{EF}//\overline{AC}\Rightarrow\ m\measuredangle CBQ=\theta$
- En $\triangle PBD$:

$$(x+4)^2=ab \qquad ...(I)$$

- Por teorema de la secante:

$$ab=x(x+10) \qquad ...(II)$$

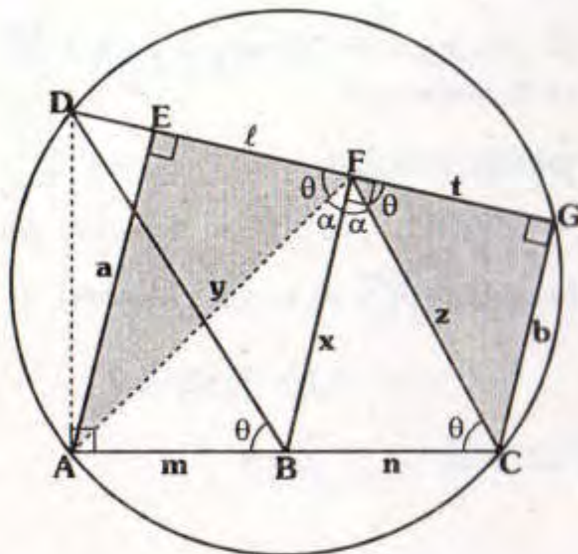
- De (I) y (II):

$$(x+4)^2=x(x+10)$$

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 234



Nos piden x.

Datos: $ab=15$ y $mn-\ell t=3$

- Notemos que el ⌂DFBA es inscriptible $\Rightarrow\ m\measuredangle AFE=\theta$
- En el $\triangle AFC$, $\overline{FB}$ es bisectriz interior.

$$\Rightarrow\ x^2=yz-mn \qquad ...(I)$$

- Como ⊿AEF ~ ⊿CGF, por teorema de Dostor:

$$yz=ab+\ell t \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$x^2=ab+\ell t-mn$$

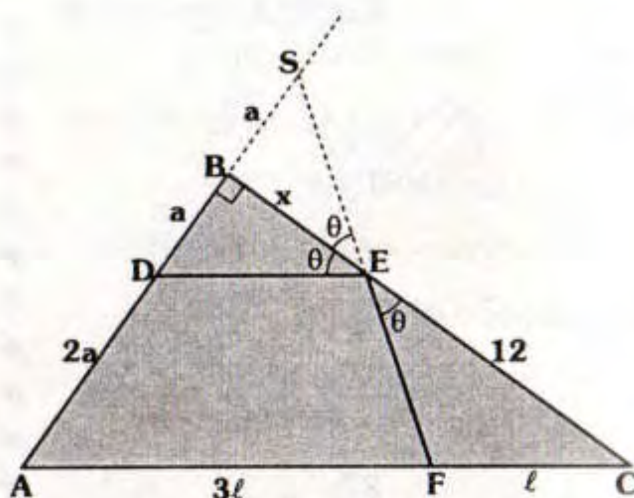
$$x^2=\underbrace{ab}_{15}-\underbrace{(mn-\ell t)}_{3}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=2\sqrt{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 235

Piden x.



- Al prolongar $\overline{FE}$ hasta que corte a $\overleftrightarrow{AB}$ en S, notamos:

  $\triangle$DES: isósceles $\Rightarrow$ DB=BS=a

- En $\measuredangle$ABC, usemos el teorema de Menelao ($\overleftrightarrow{FES}$ es la recta secante):

$$x\ell \cdot (4a) = (12)(3\ell)(a)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=9}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 236

Nos piden x.

- Se prolonga $\overline{SP}$ hasta **E** tal que TP=TE=a

- Las rectas $\overleftrightarrow{SQ}$ y $\overleftrightarrow{ET}$ se cortan en H.
- En la circunferencia: $m\widehat{QP}+m\widehat{PS}+m\widehat{SQ}=360°$

$$\Rightarrow\ 2\beta+2\alpha+2\theta=360° \Rightarrow \beta+\alpha+\theta=180°$$

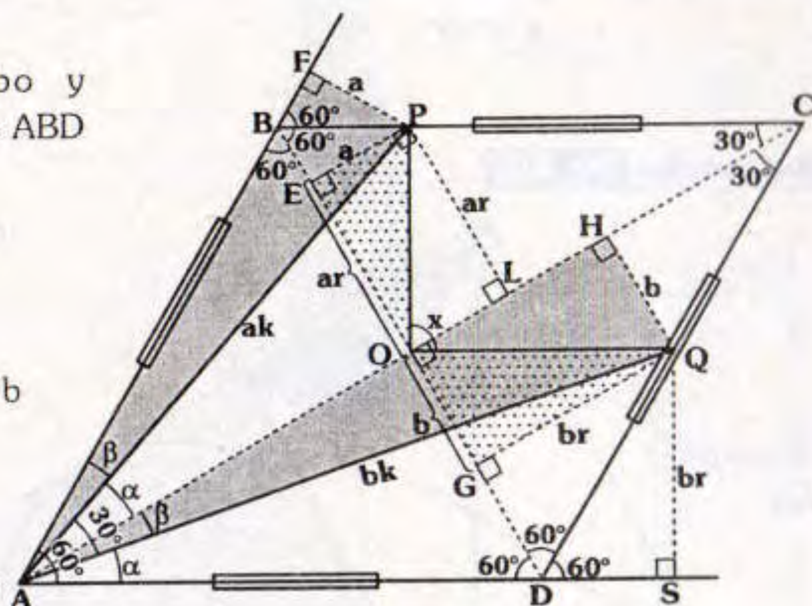
- En ΔHSE: como $\beta+\alpha+\delta=180° \Rightarrow \delta=\theta \Rightarrow a=b$
- Como $m\measuredangle SBM=\theta \Rightarrow \overline{HE}//\overline{BP}$
- $\Delta HSE \sim \Delta BSP \Rightarrow BN=NP=m$
- Como $AM=MP \Rightarrow x+m-y=m+y$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\mathbf{2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 237

Nos piden x.



- Como ABCD es un rombo y $m\measuredangle BAD=60° \Rightarrow$ los triángulos ABD y BCD son equiláteros y

$$m\measuredangle BAC=m\measuredangle CAD=30°$$

$$\Rightarrow\ \alpha+\beta=30°$$

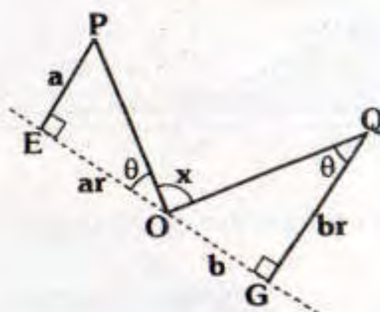
- $⊿AFP \sim ⊿AHQ$, si $FP=a$ y $HQ=b$

$\Rightarrow AP=ak$ y $AQ=bk$

- $⊿ALP \sim ⊿ASQ$

$\Rightarrow PL=EO=ar$ y $QS=GQ=br$

- Analicemos ahora la posición y las razones de los lados de los ⊿s OEP y QGO.



- Notemos que $⊿PEO \sim ⊿OGQ$

$\Rightarrow\ m\measuredangle EOP=m\measuredangle OQG$

$$x+\theta=90°+\theta$$

$$\therefore\ \mathbf{x=90°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 238

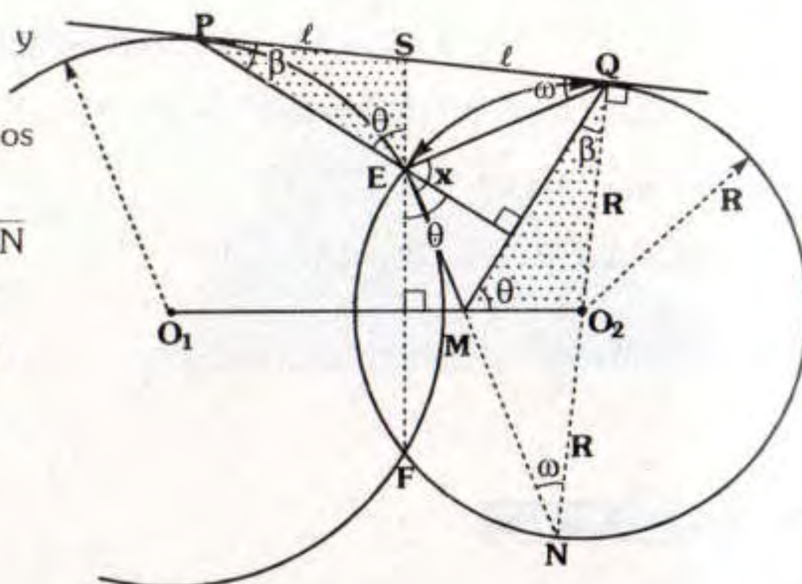
Nos piden x.

- Por propiedad: $\overline{O_1O_2} \perp \overline{EF}$ y PS=SQ
- Al completar ángulos, nos damos cuenta:

  $\triangle PES \sim \triangle QO_2M \Rightarrow \overline{EQ}$ y $\overline{MN}$ son líneas homólogas.
- Luego: $m\measuredangle EQP = m\measuredangle O_2NM$
- Como $m\widehat{EQ} = 2(m\measuredangle QNM)$

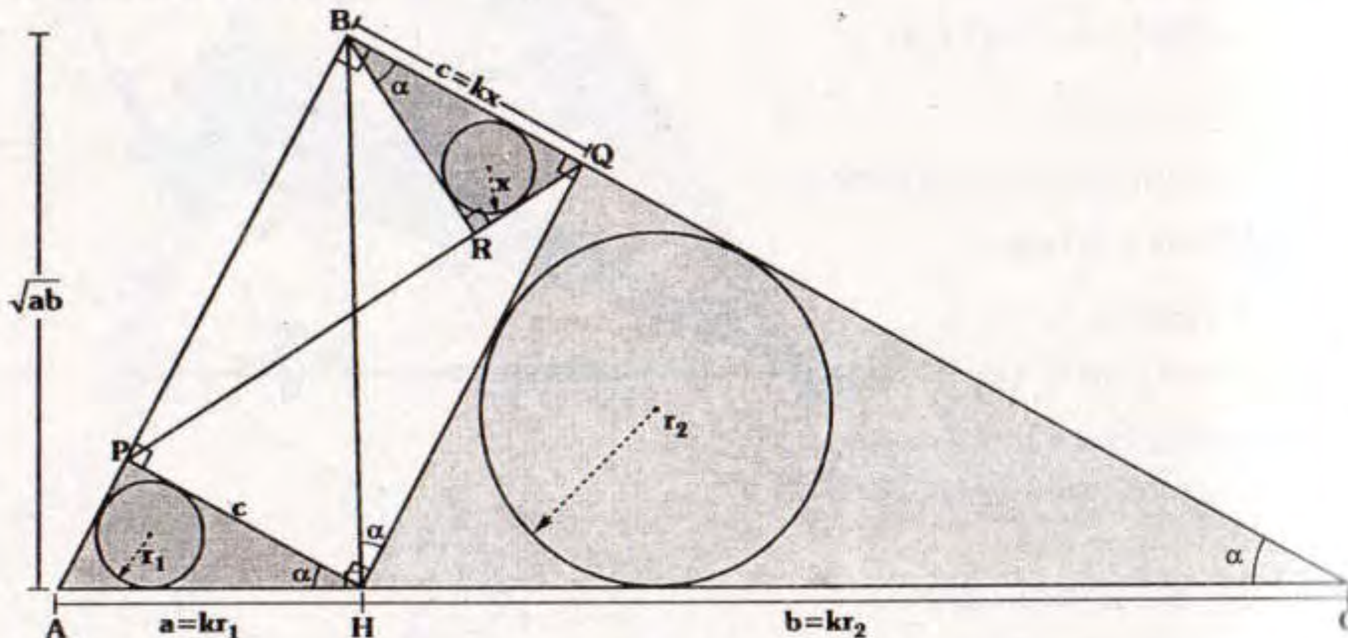
  $\Rightarrow$ N, M y E son colineales.
- Como $\overline{QN}$ es diámetro

  $\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 239



Nos piden x en función de r_1 y r_2.

- Notamos que: $\triangle AHP \sim \triangle HCQ \sim \triangle QBR \Rightarrow \dfrac{a}{r_1} = \dfrac{b}{r_2} = \dfrac{c}{x} \Rightarrow a = kr_1; b = kr_2; c = kx$
- En $\triangle ABC$: $BH = \sqrt{ab}$
- Como HP=BQ=c

- En ⊿AHB: $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(\sqrt{ab})^2} \Rightarrow \dfrac{1}{k^2x^2}=\dfrac{1}{k^2(r_1)^2}+\dfrac{1}{kr_1 \cdot kr_2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_1r_2} \qquad \therefore\ \mathbf{x}=r_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 240

Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ la recta de Euler del ΔABC.

Nos piden x; dato: $a+c=2b$

- Como ΔABC~ΔMHN

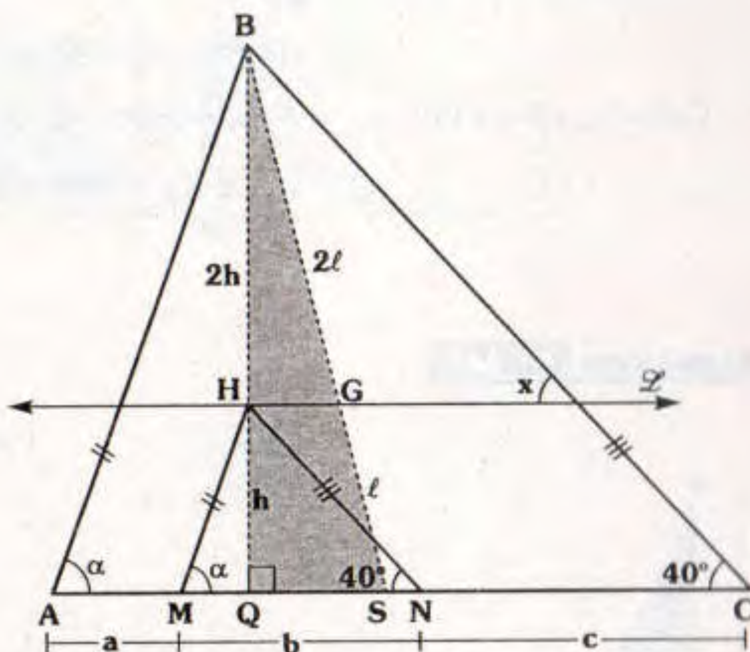
$$\Rightarrow \frac{BQ}{a+b+c}=\frac{h}{b} \Rightarrow \frac{BQ}{3b}=\frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow BQ=3h \Rightarrow BH=2h$$

- Donde H y G son ortocentro y baricentro del ΔABC.
- Como BG=2(GS) y BH=2(HQ)

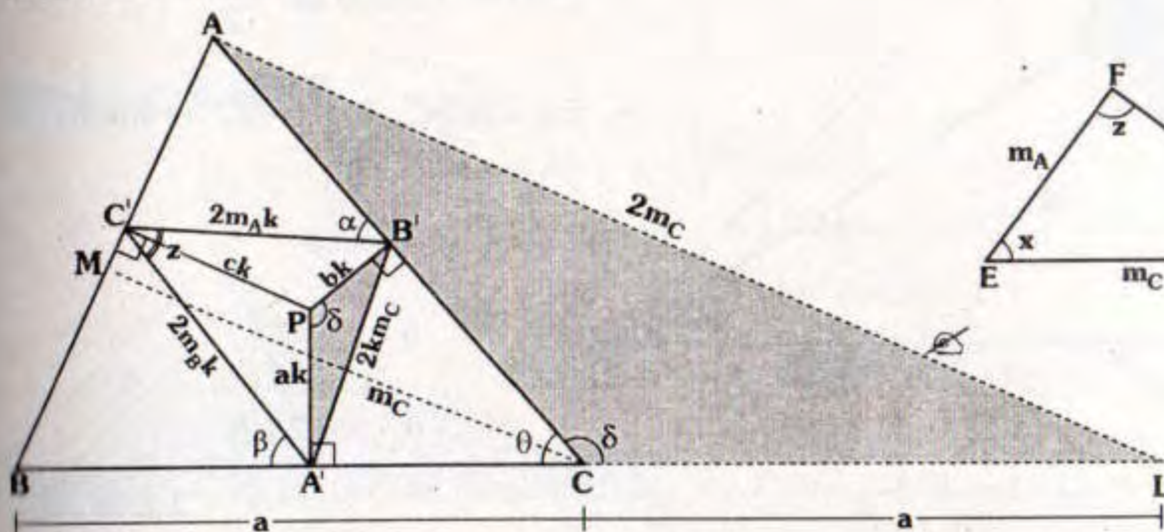
$$\Rightarrow \overline{HG}//\overline{AC} \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}}//\overline{AC}$$

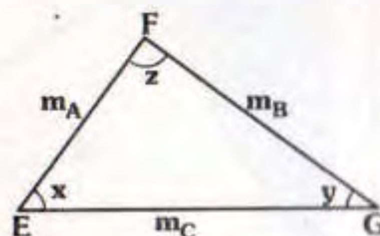
$$\therefore\ \mathbf{x=40°}$$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 241





Nos piden x+y.

- Sea M punto medio de $\overline{AB}$, CL=a $\Rightarrow CM = m_c$ y en el $\triangle ABL$ por base media: $AL = 2m_C$
- Como el ⊿A'PB'C es inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle ACL = m\measuredangle A'PB' = \delta$
- Luego $\triangle LCP \sim \triangle A'PB'$ (2do caso) $\Rightarrow A'C' = 2(m_C)k$
- Análogamente: $A'C' = 2(m_B)k$ y $B'C' = 2(m_A)k$

$$\Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle GEF \Rightarrow m\measuredangle EFG = z$$

- Como $\alpha + \beta = z + \theta$ y $x+y+z=180°$ $\Rightarrow$ $x+y=180° - (\alpha + \beta - \theta)$

$$\therefore \ \mathbf{x + y = 180° + \theta - \alpha - \beta}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 242

Nos piden $\theta - \alpha$.

- Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se corten en E.
- En ⊿EAD: por propiedad del teorema de Ceva,

  AM=MD y BL=LC

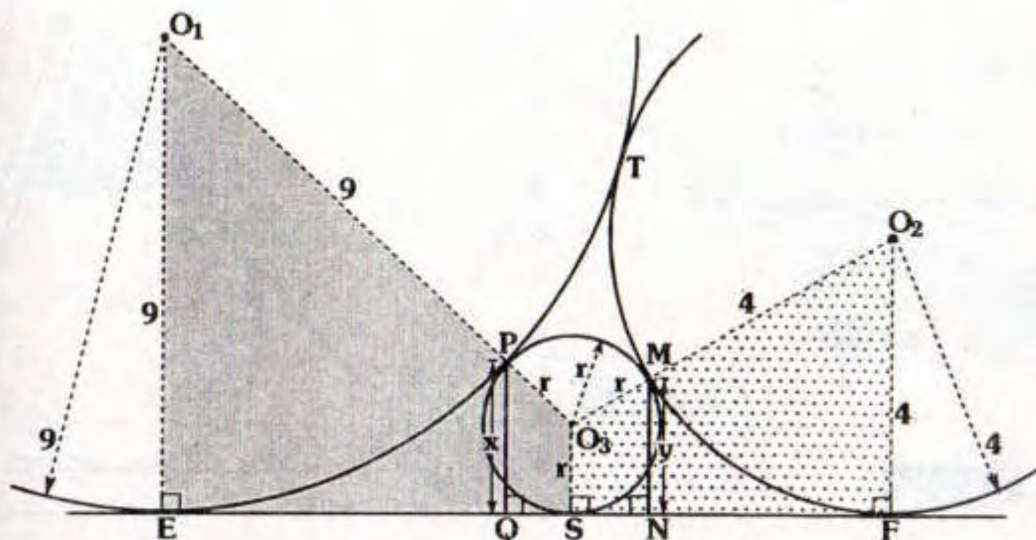
- ⊿AME: notable de $\dfrac{53°}{2}$
- En ⊿BSC, como $\overline{SL}$ es mediana $\Rightarrow m\measuredangle LSC = \theta$
- En $\triangle AES$:

$$\theta = \alpha + \frac{53°}{2}$$

$$\therefore \ \theta - \alpha = \mathbf{26,5°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 243



Nos piden x/y.

- En los trapecios O_1ESO_3 y O_2FSO_3

$$x=\frac{9r+r9}{r+9} \quad y \quad y=\frac{4r+r4}{4+r} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=\frac{9(4+r)}{4(9+r)} \qquad ...(I)$$

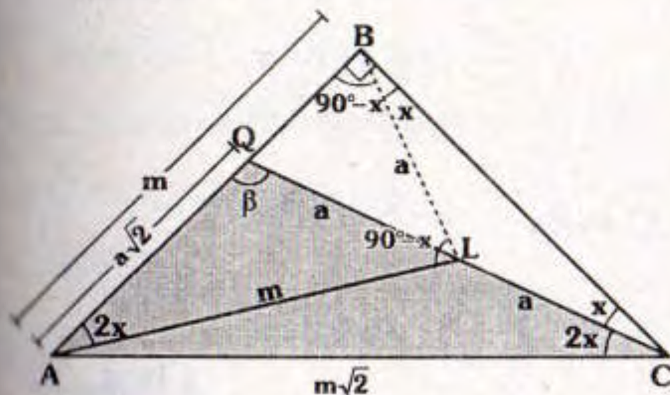
- Propiedad:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{4}} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{36}{25}$$

- Reemplazando en (I): $\mathbf{\dfrac{x}{y}=\dfrac{34}{29}}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 244



Nos piden x.

- Como QL=LC ⇒ BL=a
- En △AQC:

$$(AQ)^2=(QL)(QC) \Rightarrow AQ=a\sqrt{2}$$

- Como △AQL ~ △CQL ⇒ $\dfrac{AL}{AC}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow AC = \underbrace{(AL)}_{m}\sqrt{2}$$

- Como $\triangle ABL$: isósceles

$$\Rightarrow AL = AB = m$$

- Luego $\measuredangle ABC$ es notable de 45°

$$\Rightarrow 3x = 45°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 245

Piden x/y.

- Como $\measuredangle ABC$ es notable de 37°

$$\Rightarrow BC = 3m \text{ y } AC = 5m$$

- En $\triangle LPC$, usamos el teorema de Menelao:

$$x(3m)(1) = y(3)(5m)$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = 5}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 246

Nos piden el menor valor de "a+b+c" en función de x.

- Sea $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ y por propiedad de circunferencia el semiperímetro del $\triangle PQB$ es: $PT = p-b$

- $\triangle ABC \sim \triangle PBQ \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{b} = \dfrac{p-b}{p}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{b(p-b)}{p}$$

- Usando el teorema de las medias para b y (p–b):

$$\sqrt{b(p-b)} \le \frac{b+p-b}{2}$$

$$\underbrace{\frac{b(p-b)}{p}}_{x} \le \frac{p}{4}$$

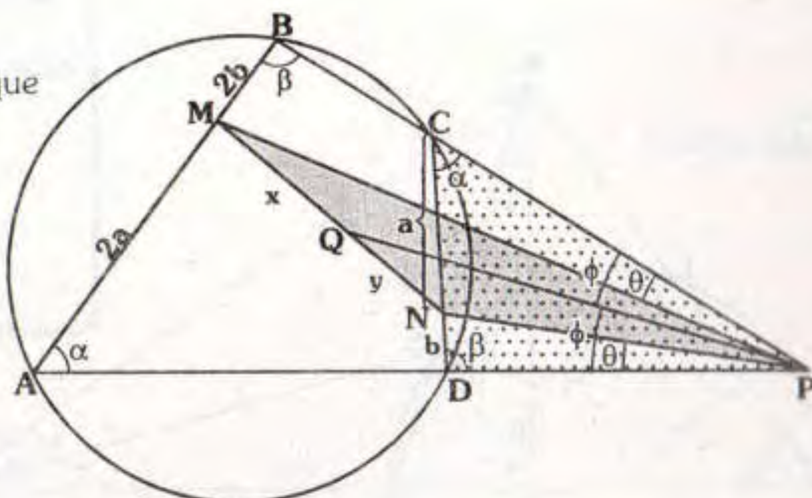
- Luego $\quad a+b+c \ge 8x$

$$\therefore \quad \mathbf{(a+b+c)_{mínimo} = 8x}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 247

Piden x/y.



- Notamos que $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ y que M y N son puntos homólogos

  $\Rightarrow m\measuredangle BPM = m\measuredangle DPN$

- Luego: $m\measuredangle NPQ = m\measuredangle QPM$, es decir $\overline{PQ}$ es bisectriz del $m\measuredangle NPM$.

- En $\triangle NPM$:

  $$\frac{x}{y} = \frac{PM}{PN} \qquad \text{....(I)}$$

- $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ son líneas homólogas en los triángulos ABC y CPD

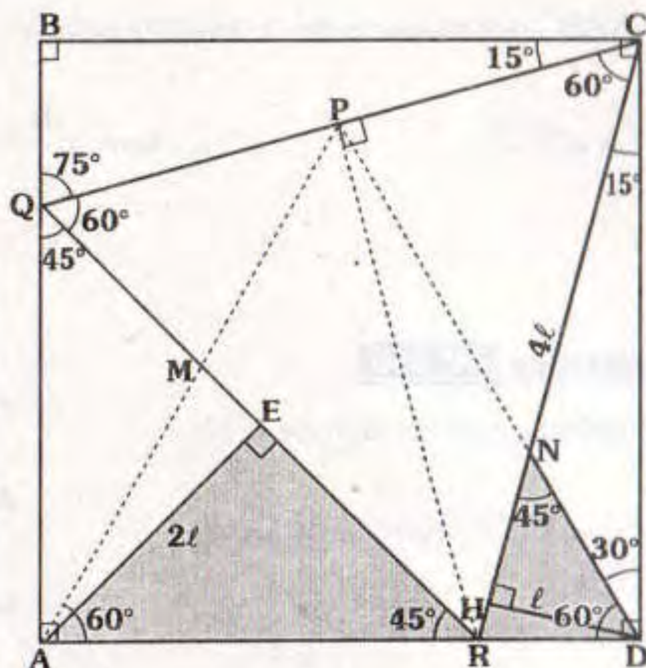
  $$\Rightarrow PM = 2(DN)$$

  $$\therefore \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 248

Nos piden la razón de inradios de los triángulos AMR y RND.

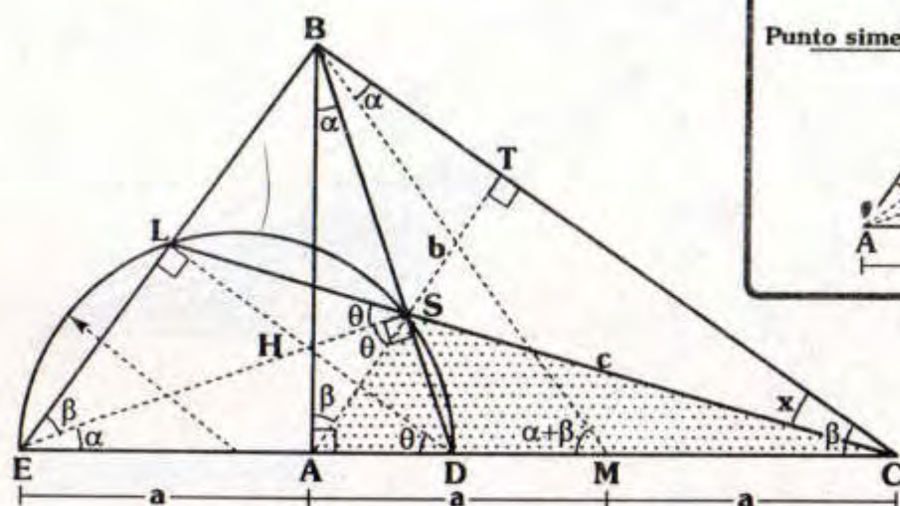


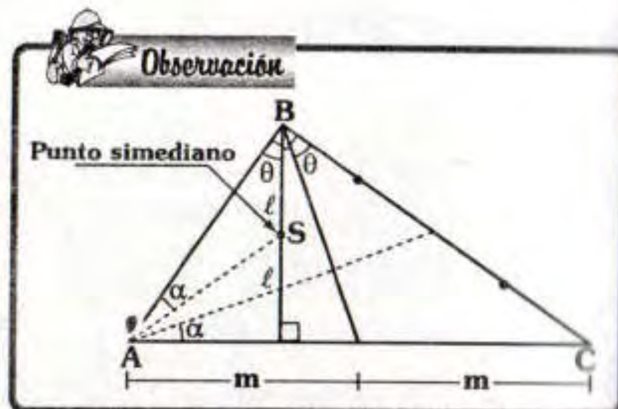
- Se demuestra que P pertenece a $\overline{QC}$ (*aunque en el problema no es necesario*).
- Basta notar que $\triangle ARM \sim \triangle DNR$ y que la razón de inradios, es la razón de semejanza
- $RC = 4(DH) \Rightarrow DH = \ell$ y $RC = 4\ell$
- Como $\triangle CQR$ es equilátero $\Rightarrow RQ = 4\ell$
- En $\triangle QAR$: notable de 45°

  Como $QR = 4\ell \Rightarrow AE = 2\ell$
- La razón de semejanza es: $\dfrac{2\,\ell}{\ell} = \mathbf{2}$

Clave B

Resolución N° 249





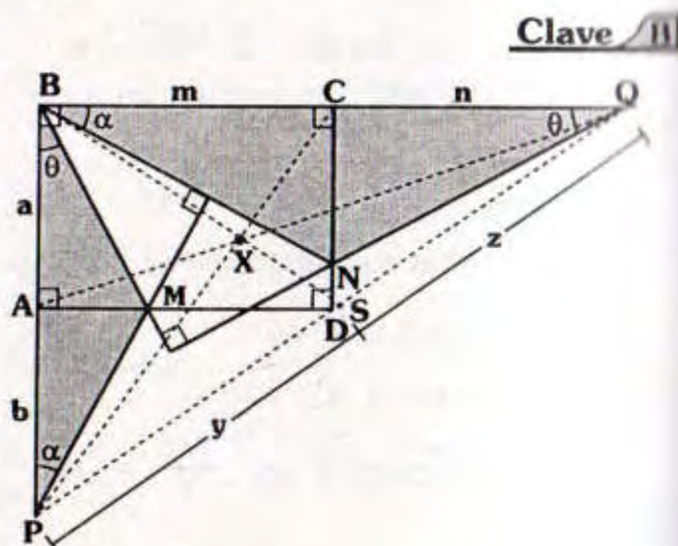
Nos piden senx

- De la observación: $\overline{AS} \perp \overline{BS}$ y AS=ST
- Para el ⊿BAC, $\overline{BM}$ es mediana $\Rightarrow$ m∢DBA = m∢MBC = α
- H: ortocentro del ΔEBD $\Rightarrow$ m∢ASE = m∢ESL = θ

  ΔEBM: isósceles $\Rightarrow$ EA=AM=MC=a
- ΔASC por teorema de la bisectriz exterior: $\frac{b}{c}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$
- En ⊿STC: $\text{senx}=\frac{b}{c}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

Clave B

Resolución N° 250



Nos piden y/z en función de a y b.

- En ⊿PBQ: teorema de Ceva

  $yan = zmb \Rightarrow \frac{y}{z}=\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{m}{n}\right)$ ...(I)

- $\Delta PBM \sim \Delta PQN \qquad \Rightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{b}{a} \qquad ...(II)$
- De (I) y (II): $\qquad \therefore \; \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{z}}=\left(\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)^2$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 251

Nos piden x/y en función de $\theta+\alpha$.

- En ΔAEF y ΔABC, usemos el teorema (pág. 36)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\phi}=\dfrac{x\ell}{y\ell}\\[2mm]\dfrac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\phi}=\dfrac{mb}{nc}\end{array}\right\}\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{b}{c} \qquad ...(I)$$

- En ΔBIC: $\qquad \dfrac{m}{n}=\dfrac{BI}{IC}=\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta} \qquad ...(II)$

- En ΔABC: $\qquad \dfrac{b}{c}=\dfrac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}2\alpha} \qquad ...(II)$

- De (I), (II) y (III):

$$\therefore \; \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\frac{\mathbf{cos\theta}}{\mathbf{cos\alpha}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 252

Nos piden x.

- Nos damos cuenta que: $\triangle BPO \sim \triangle ODQ$

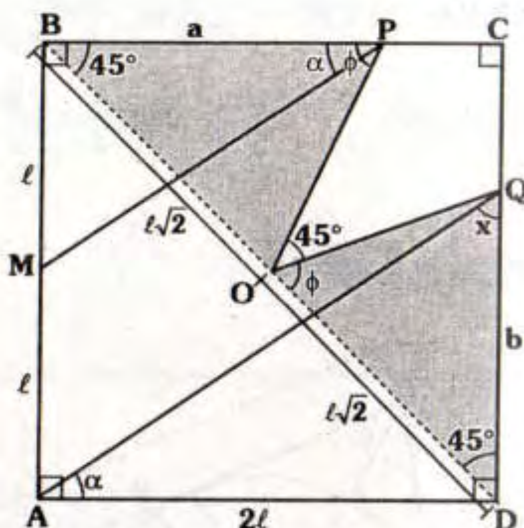
$$\Rightarrow \frac{\ell\sqrt{2}}{a} = \frac{b}{\ell\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{b}{2\ell}$$

- Luego $⊿MBP \sim ⊿QDA$

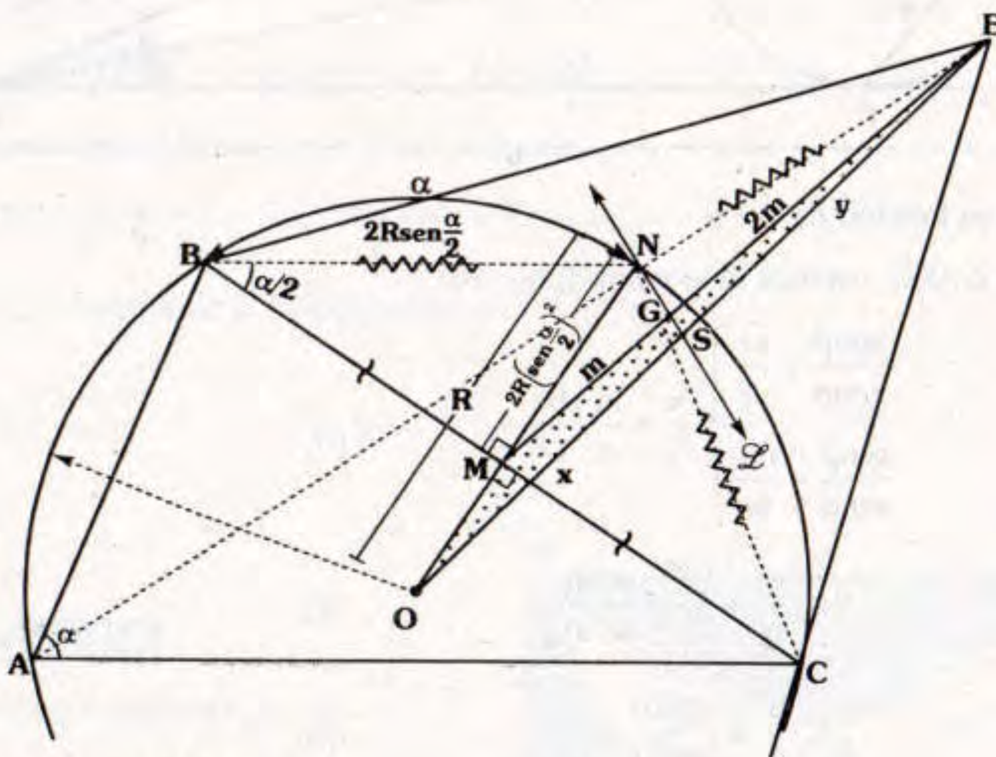
$$\Rightarrow m\sphericalangle QAD = \alpha$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90° - \alpha}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 253



Nos piden x/y en función de α.

- Donde $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler.
- Se sabe que N es circuncentro del $\triangle BEC$.
- Sea G baricentro del $\triangle BEC$ (BM=MC y EG=2(GM)).

- En $\triangle$OME, por teorema de Menelao, ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta secante).

$$x(2m)\left(2R\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)=ymR$$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{1}{4}\csc^2\frac{\alpha}{2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 254

- Por demostrar que x=y.
- En la prolongación de $\overline{QM}$ se ubica H tal que:

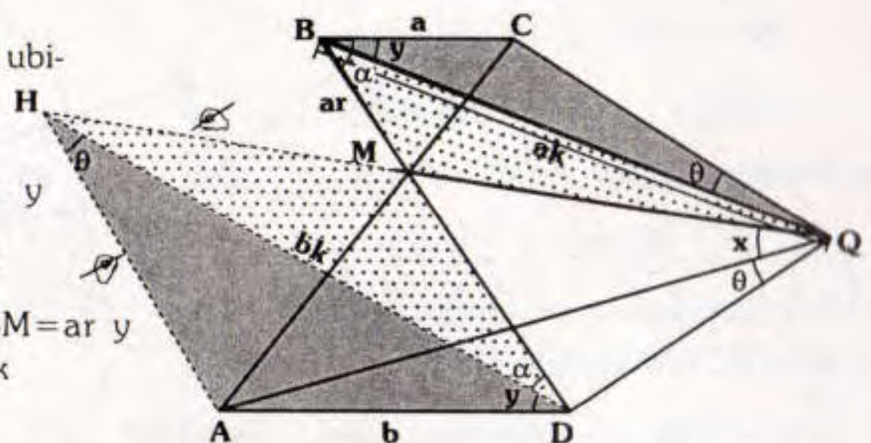
$\overline{DH}//\overline{QB} \Rightarrow \triangle DMH \sim \triangle BMC$ y

$\triangle BMC \sim \triangle DMC$

- Sea BC=a y AD=b $\Rightarrow$ BM=ar y MD=br $\Rightarrow$ BQ=ak y HD=bk
- Luego:

$\triangle HDA \sim \triangle QBC \Rightarrow m\measuredangle AHD=\theta$

- Como $\triangle$AHQD es inscriptible: $\therefore$ **x = y**



RESOLUCIÓN Nº 255

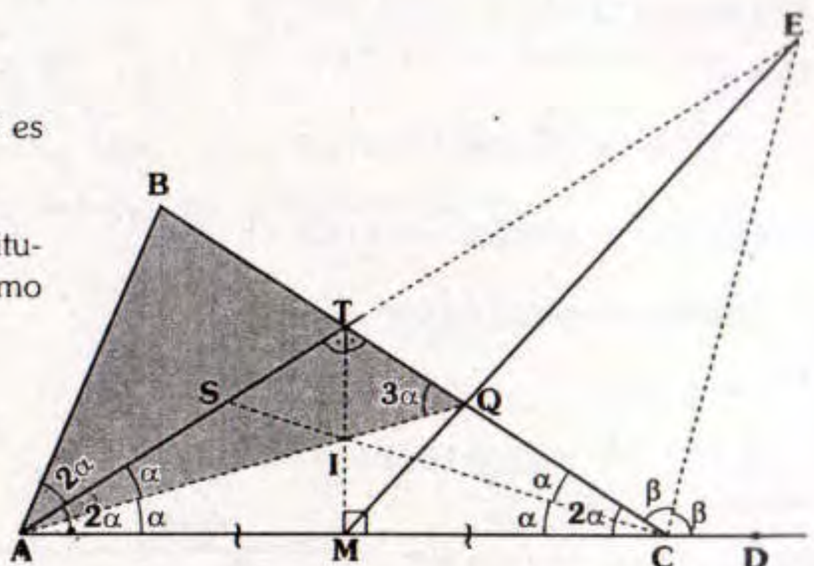
Nos piden demostrar que AB=BQ

- Sea $\overline{AE}\cap\overline{BC}=\{T\} \Rightarrow \triangle ATC$ es isósceles, luego $\overline{TM}\perp\overline{AC}$
- Sabemos que A, S, T y E constituyen una cuaterna armónica como $m\measuredangle DCE=m\measuredangle ECB$

$\Rightarrow m\measuredangle BCS=m\measuredangle SCA$

- Luego I es incentro del $\triangle$ATC

$\Rightarrow m\measuredangle CAQ=m\measuredangle QAT=\alpha$

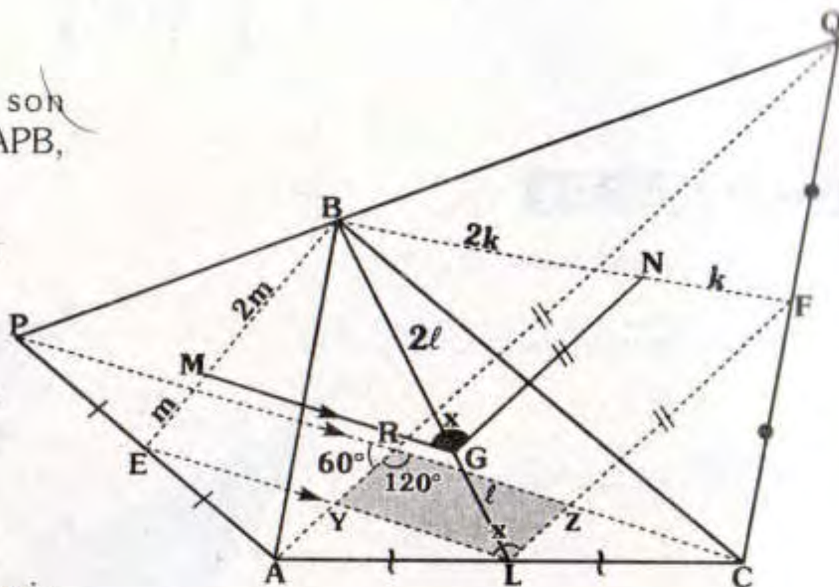


- Notamos que: $m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle AQB = 3\alpha$

$$\therefore \quad \mathbf{AB = BQ}$$

RESOLUCIÓN Nº 256

Nos piden x.



- Debido a que M, G y N son baricentro de los triángulos APB, ABC y BQC

  $\Rightarrow BM=2(ME), BG=2(GL)$ y

  $BN=2(NF) \Rightarrow \overline{MG}//\overline{EL}$ y

  $\overline{GN}//\overline{LF} \quad \Rightarrow m\sphericalangle ELF = x$

- Por base media:

  $\overline{EL}//\overline{PC}$ y $\overline{LF}//\overline{AQ}$

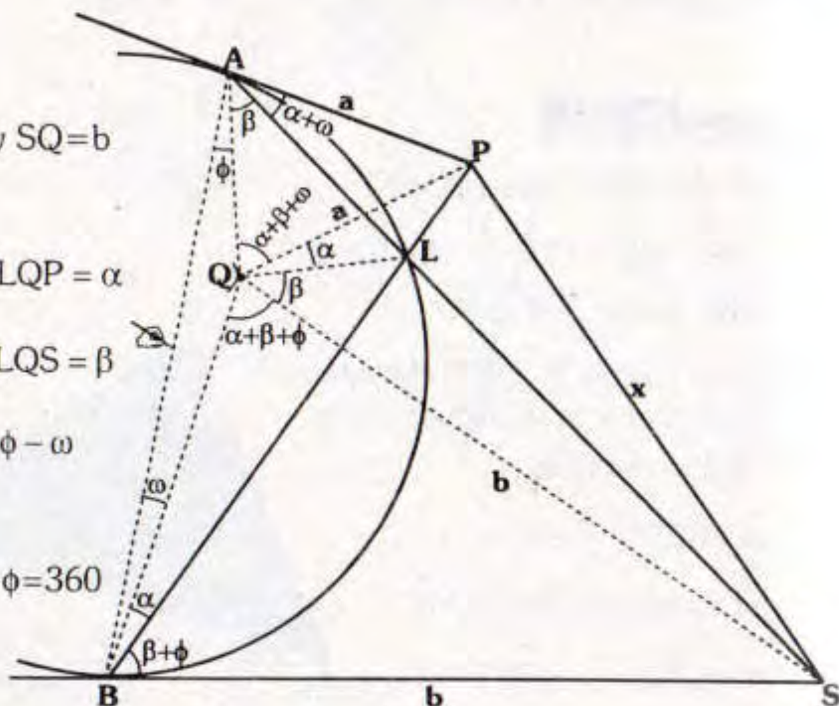
- Por propiedad de congruencia $AQ=PC$ y $m\sphericalangle ARP = 60°$

- Como YRZL es un paralelogramo: $\mathbf{x = 120°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 257

Nos piden x.



- Ubiquemos **Q** tal que PQ=a y SQ=b
- Como:

$a^2 = (PL)(PD) \Rightarrow m\sphericalangle QBP = m\sphericalangle LQP = \alpha$

$b^2 = (TL)(TA) \Rightarrow m\sphericalangle QAS = m\sphericalangle LQS = \beta$

- En ΔBQA: $m\sphericalangle AQB = 180° - \phi - \omega$
- En Q:

$$\underbrace{180°-\phi-\omega}_{m\sphericalangle AQB}+\alpha+\beta+\omega+\alpha+\beta+\alpha+\beta+\phi=360$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 60°$$

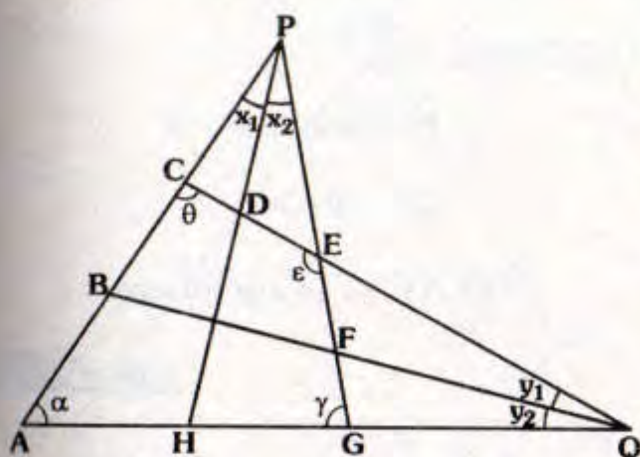
- En $\triangle PQS$:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}$$

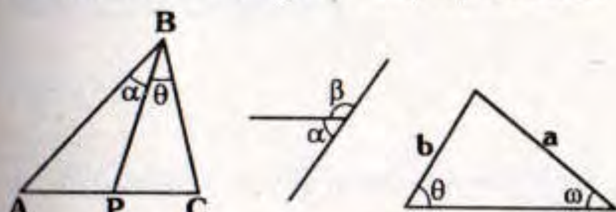
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 258



Nos piden: $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FG}\cdot\frac{GH}{HA}$

- Usaremos las siguientes propiedades:



$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}=\frac{AP\cdot BC}{PC\cdot AB}$; $\text{sen}\,\alpha=\text{sen}\beta$; $\frac{a}{b}=\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\omega}$

- En $\triangle APG$ y $\triangle PCE$

$$\frac{\text{sen}x_1}{\text{sen}x_2}=\frac{AH\cdot PG}{HG\cdot AP}=\frac{CD\cdot PE}{DE\cdot CP}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE}\cdot\frac{HG}{AH}=\frac{CP}{PE}\cdot\frac{PG}{AP}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE}\cdot\frac{GH}{HA}=\frac{\text{sen}\varepsilon}{\text{sen}\theta}\cdot\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} \quad ...(I)$$

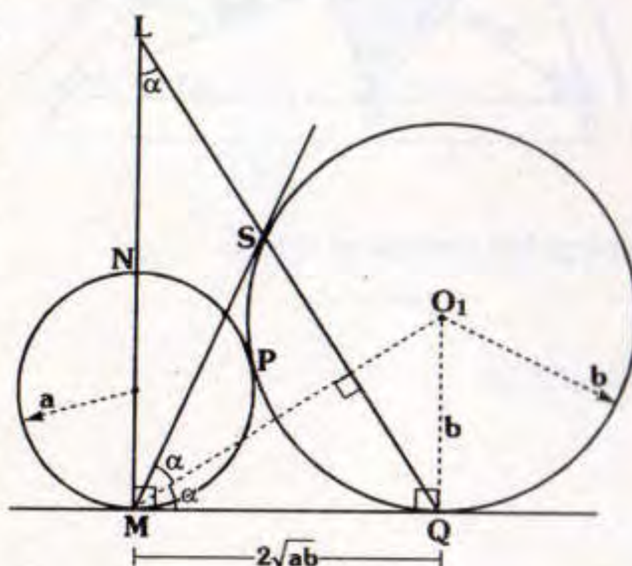
- Análogamente para y_1 e y_2 en los triángulos CQA y EQG:

$$\Rightarrow \frac{EF}{FG}\cdot\frac{AB}{BC}=\frac{\text{sen}\gamma}{\text{sen}\varepsilon}\cdot\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha} \quad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{FG}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{GH}{HA}=1$$

RESOLUCIÓN Nº 259



Nos piden MN/NL.

- Tenemos que MN=2a
- Por propiedad de circunferencia:

$$MQ = 2\sqrt{ab}$$

- $\measuredangle MQO_1 \sim \measuredangle LMQ$

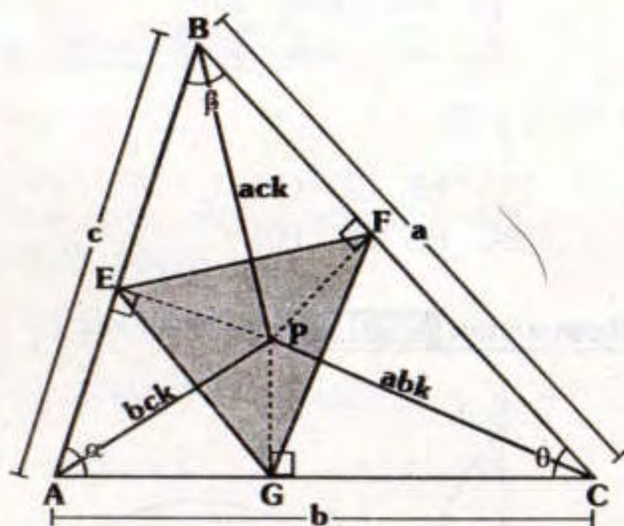
$$\frac{b}{2\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}}{ML} \Rightarrow ML=4a$$

- Como $ML=4a \Rightarrow LN=2a$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{MN}{NL}=1}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 260



Nos piden analizar el ΔEFG.

- Las características del punto de Apolonio, hacen que:

$$AP = bck,\ PC = abk \ \text{y} \ BP = ack$$

- En ⏢APEG:

$$EG = bck\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{am} \Rightarrow EG = abc(km)$$

- Análogamente:

$$EF = (abc)(km) \quad y$$

$$GF = (abc)km$$

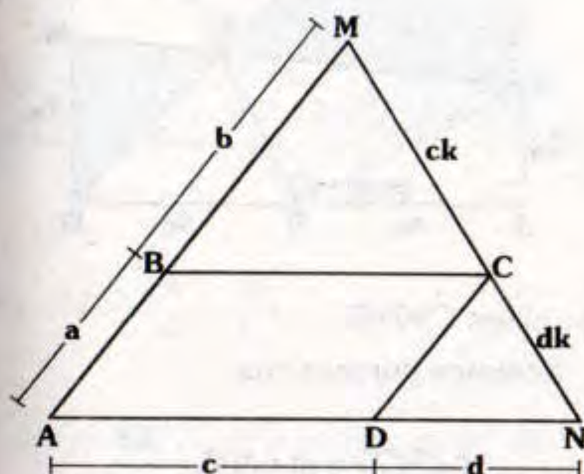
∴ **El ΔEFG es equilátero**

Clave E



Solucionario Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN Nº 261



Nos piden la relación entre a, b, c y d.

- Por teorema de Tales:

$*$ MC=ck y CN =dk

$* \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{d\cancel{k}}{c\cancel{k}}$

$\therefore \quad$ **ac = bd**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 262

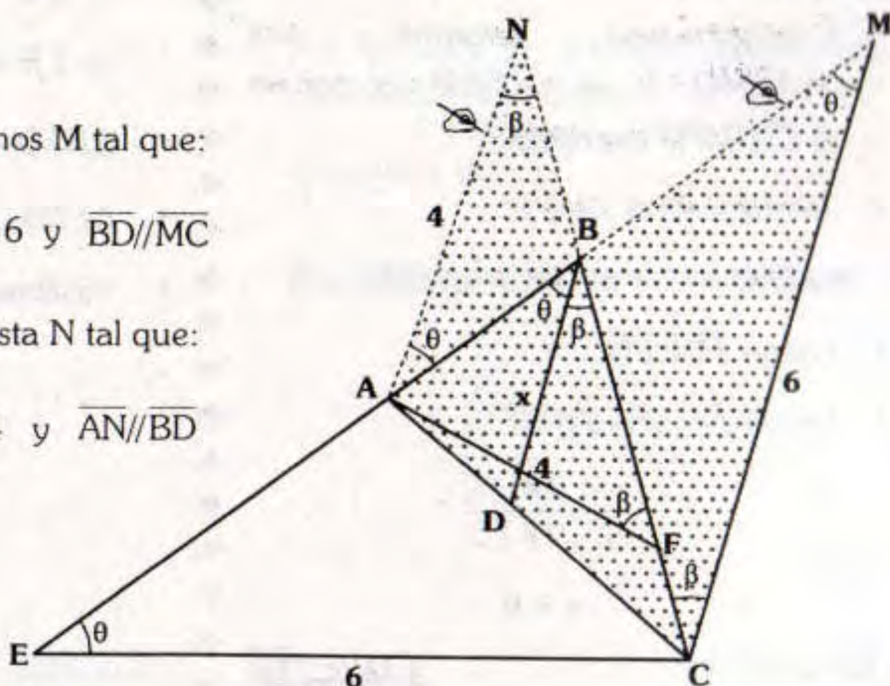
Nos piden x.

- Prolongamos $\overline{AB}$ y ubicamos M tal que:

  $m\measuredangle BMC=\theta \Rightarrow EC=CM=6$ y $\overline{BD}//\overline{MC}$

- Luego, se prolonga $\overline{CB}$ hasta N tal que:

  $m\measuredangle BNA=\beta \Rightarrow AN=AF=4$ y $\overline{AN}//\overline{BD}$



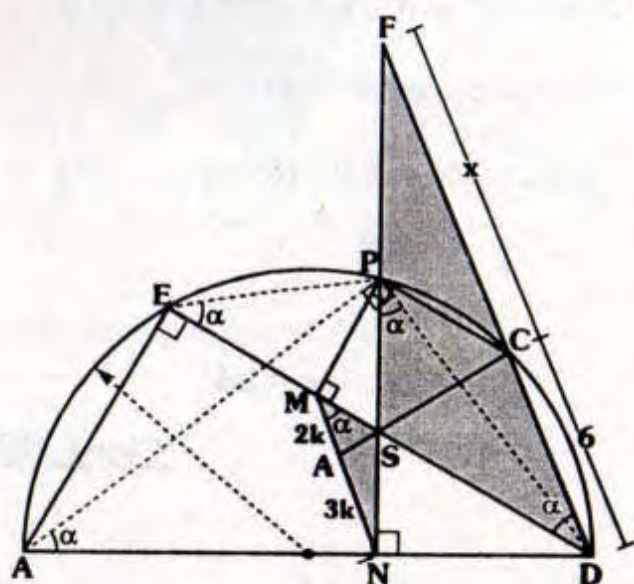
- Finalmente, como $\overline{AN}//\overline{BD}//\overline{CM}$:

$$x=\frac{(6)(4)}{(6+4)}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=2,4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 263



Nos piden x.

- Completemos ángulos, sea $m\sphericalangle NMD=\alpha\ \Rightarrow\ m\sphericalangle NPD=\alpha$, por ser el ⌂NMPD inscriptible.
- También en el ⊿APD:

$$m\sphericalangle PAD=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle PED=m\sphericalangle EDC=\alpha$$

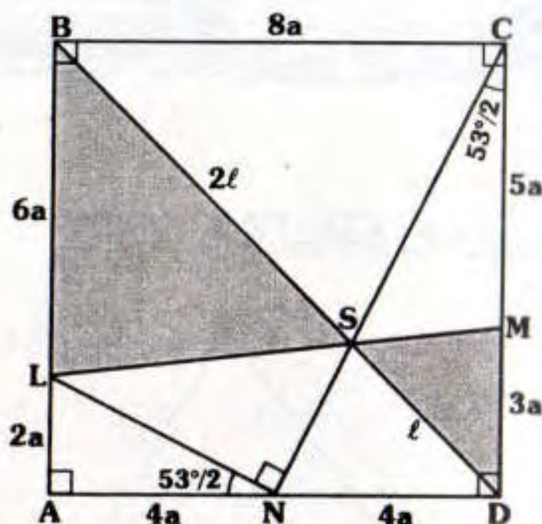
- Luego $\overline{MN}//\overline{FD}$
- Como $\Delta MSN\sim\Delta DSF$

$$\frac{x}{6}=\frac{3\not{k}}{2\not{k}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{x=9}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 264



Nos piden CM/MD.

- Notemos primero que:

$$m\sphericalangle NCD=m\sphericalangle ANL=\frac{53°}{2}$$

- ⊿LAN: sea AL=2a

$\Rightarrow$ AN=4a, como AN=ND=4a

$\Rightarrow$ DC=AB=8a

$\Rightarrow$ LB =6a

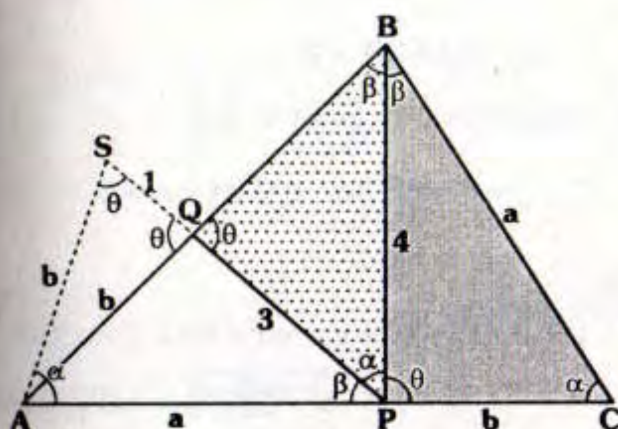
- $\Delta NSD\sim\Delta CSD \Rightarrow BS=2(SD)$
- $\Delta LSB\sim\Delta MSD \Rightarrow MD=3a \Rightarrow CM=5a$
- Finalmente:

$$\frac{CM}{MD}=\frac{5a}{3a}$$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{CM}{MD}=\frac{5}{3}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 265



Nos piden $\dfrac{BC}{PC}=\dfrac{a}{b}$.

- Se ubica "S" en la prolongación de $\overline{PQ}$ tal que:

$$m\sphericalangle SAP = m\sphericalangle BCA=\alpha$$

$$\Rightarrow \Delta SAP \cong \Delta PCB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ASP = m\sphericalangle BPC=\theta \quad y$$

$$AS=PC=b$$

- ΔASQ: isósceles

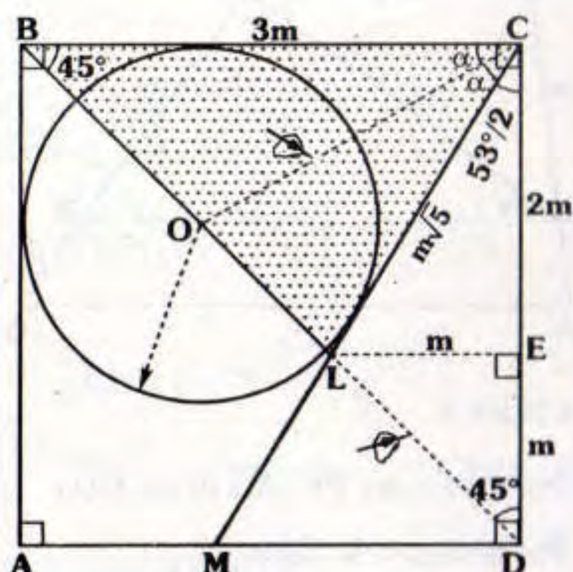
$$\Rightarrow m\sphericalangle AQS = \theta$$

- $\Delta PQB \sim \Delta CPB$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{a}{b}=\frac{4}{3}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 266



Piden $\dfrac{BQ}{QL}$.

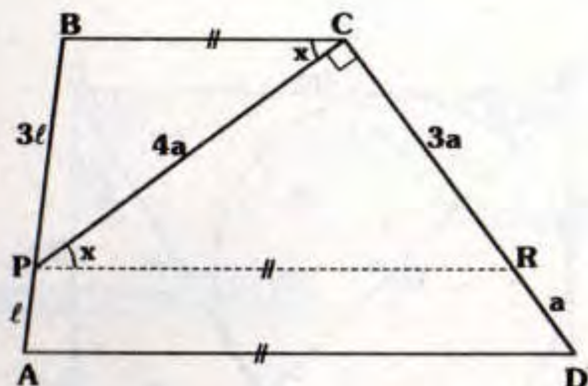
- Como $AM=MD \Rightarrow m\sphericalangle MCD=\dfrac{53°}{2}$
- La prolongación de $\overline{BL}$ llega a D.
- En ΔLCD, se traza la altura $\overline{LE}$ $\Rightarrow$ ⊿LED es notable de 45° y ⊿LEC es notable de $\dfrac{53°}{2}$
- En ΔBCL, por teorema de la bisectriz:

$$\frac{BQ}{QL}=\frac{3\cancel{m}}{\cancel{m}\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{BQ}{QL}=\frac{3}{\sqrt{5}}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 267



Nos piden x.

- Por P se traza $\overline{PR} // \overline{AD}$ (R en $\overline{CD}$)
- Por teorema de Tales.

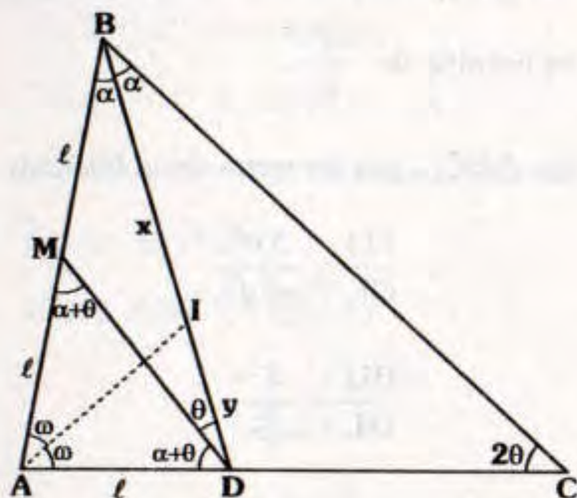
$$\frac{BP}{PA} = \frac{CR}{RD} \Rightarrow CR = 3a \text{ y } RD = a$$

- Como PC=CD=4a ⇒ ⊿PCR es notable pues PG=4a y CR=3a

$$\therefore \quad \mathbf{x = 37°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 268



Nos piden x/y.

Del dato:

$$m\measuredangle ACB = 2\underbrace{(m\measuredangle MDB)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ACB = 2\theta$$

- Deducimos fácilmente que:

$$m\measuredangle AMD = m\measuredangle ADM = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow \quad AM = AD = \ell$$

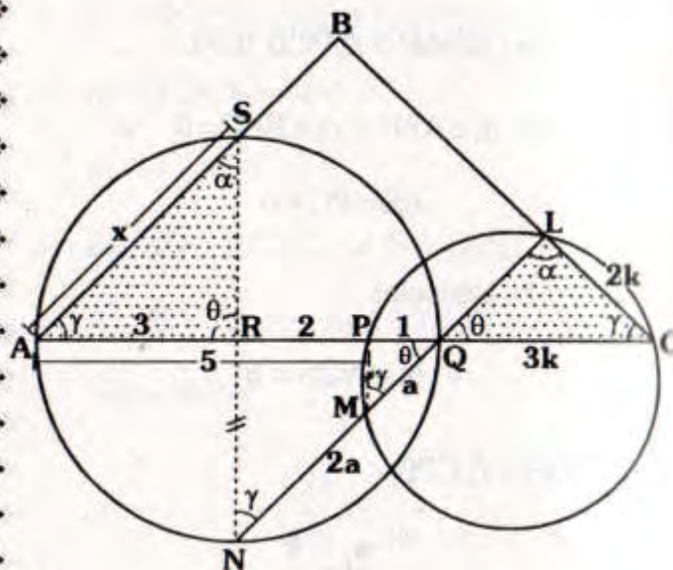
- En △ABD, por teorema de la bisectriz:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{2\ell}{\ell}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 269



Nos piden x.

- Al trazar $\overline{NS}$ nos damos cuenta que: $\overline{NS} // \overline{MP}$.

- En $\triangle NRQ$:

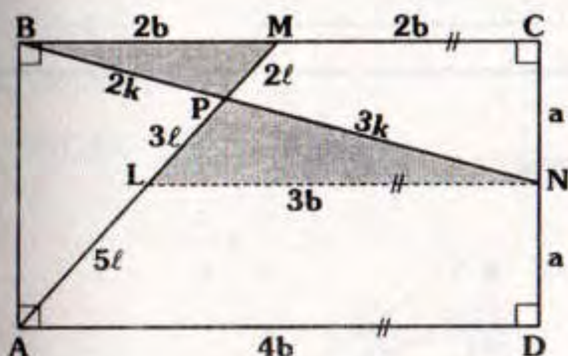
  $\overline{NR}//\overline{MP} \Rightarrow RP=2$, luego $AR=3$

- $\triangle RAS \sim \triangle LCQ \Rightarrow \dfrac{x}{3k}=\dfrac{3}{2k}$

$$\therefore \ \mathbf{x=\frac{9}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 270



Piden PM+PN.

Dato: $AM=2\sqrt{2}$ y $BN=\sqrt{17}$

- Hallemos las razones de los segmentos AP con PM y BP con PN.

- Sea L punto medio de $\overline{AM} \Rightarrow \overline{LN}$ es base media del trapecio AMCD, sea:

  $AD=4b$ y $MC=2b \Rightarrow LN=3b$

- Como $\triangle BPM \sim \triangle NPL$

  $BP=2k$ y $PN=3k$

  $\Rightarrow PN=\dfrac{3}{5}BN \qquad ...(I)$

- También:

  $LP=3\ell$, $PM=2\ell$ y $AL=5\ell$

  $\Rightarrow PM=\dfrac{2}{10}AM=\dfrac{1}{5}AM \qquad ...(II)$

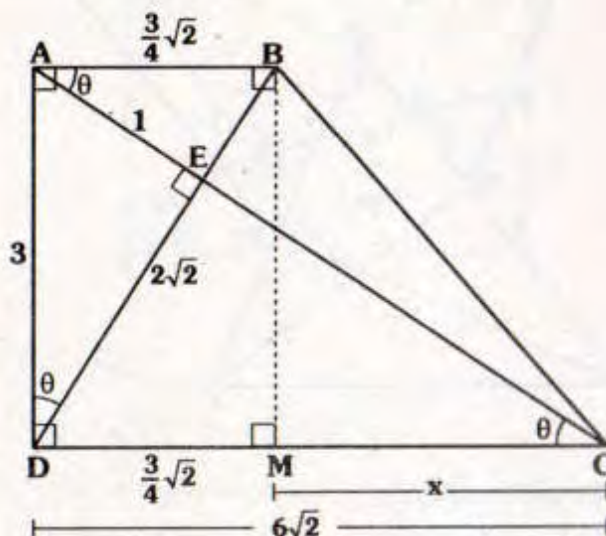
- De (I) y (II):

  $PN+PM=\dfrac{3}{5}\sqrt{17}+\dfrac{1}{5}\left(2\sqrt{2}\right)$

$$\therefore \ \mathbf{PN+PM=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 271



Nos piden x.

- En $\measuredangle AED$: $ED=2\sqrt{2}$

- $\measuredangle AED \sim \measuredangle DEC$: $DC=6\sqrt{2}$

- $\measuredangle AEB \sim \measuredangle AED$: $AB=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

- Como ABMD es un rectángulo

$$\Rightarrow \ DM = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

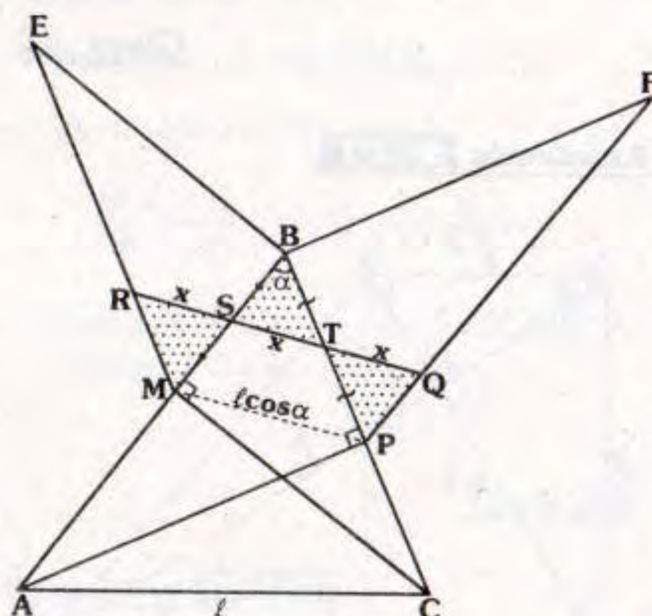
- Finalmente:

$$x + \frac{3}{4}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{21}{4}\sqrt{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 272



Nos piden RQ.

- Como S y T son los centros de los paralelogramos: BCME y ABFP

$$\Rightarrow \ RS = ST = TQ = x$$

- Luego RQ=3x
- De la observación:

$$MP = \ell\cos\alpha$$

- En ΔMBP, por base media:

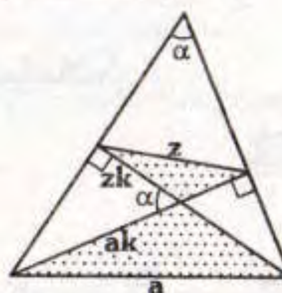
$$x = \frac{\ell}{2}\cos\alpha$$

$$\therefore \ \mathbf{RQ = \frac{3}{2}\ell\cos\alpha}$$

Clave D



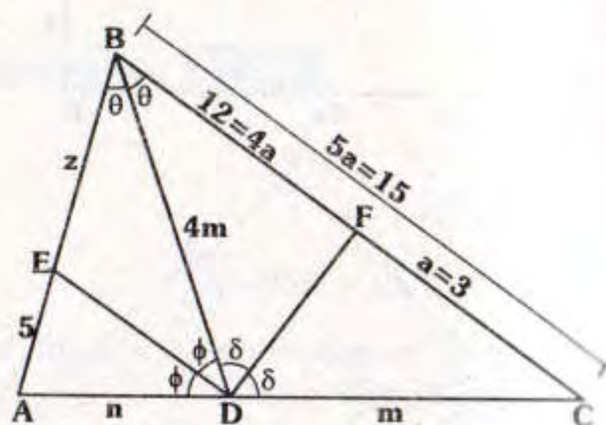
Observación



Se cumple:

$$z = a\cos\alpha$$

RESOLUCIÓN Nº 273



Nos piden AB.

- Sea EB=7 $\Rightarrow$ AB=z+5
- Como BF=4(FC) $\Rightarrow$ BD=4m
- En ΔABC: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{15}{z+5}$
- En ΔADB: $\dfrac{4m}{n} = \dfrac{z}{5}$

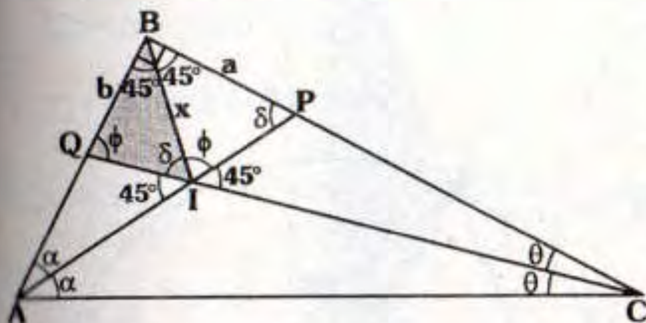
$$4\left(\frac{15}{z+5}\right) = \frac{z}{5}$$

$\Rightarrow \quad z=15$

$\therefore \quad \mathbf{AB=20}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 274



Nos piden x.

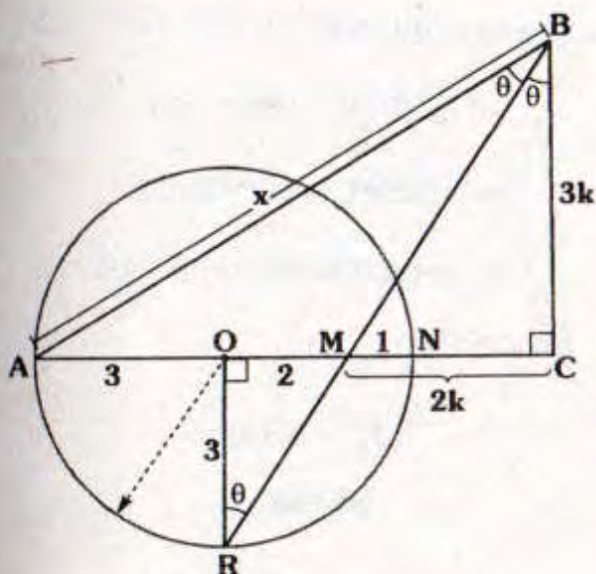
- Dato: ab=8
- $\Delta QBI \sim \Delta IBP$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a}=\frac{b}{x} \Rightarrow x^2=ab$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=2\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 275



Nos piden x.

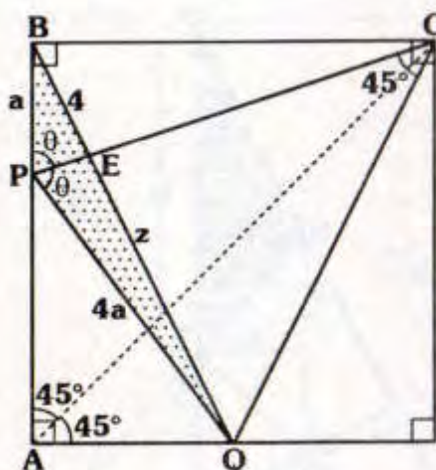
- $\triangle MOR \sim \triangle MCB \Rightarrow \dfrac{MC}{CB}=\dfrac{2}{3}$
- En $\triangle ACB$, por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{5}=\frac{3k}{2k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=7,5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 276



Piden BQ.

- Sea EQ=z ⇒ BQ=4+z
- De la observación (propiedad de puntos notables): C es excentro del $\triangle PAQ$

$$\Rightarrow m\measuredangle BPC = m\measuredangle CPQ$$

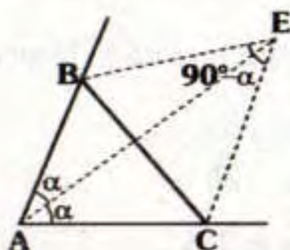
- En ΔBPQ, por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{z}{4}=\frac{4\cancel{a}}{\cancel{a}} \Rightarrow z=16$$

$$\therefore \quad \mathbf{BQ=20}$$

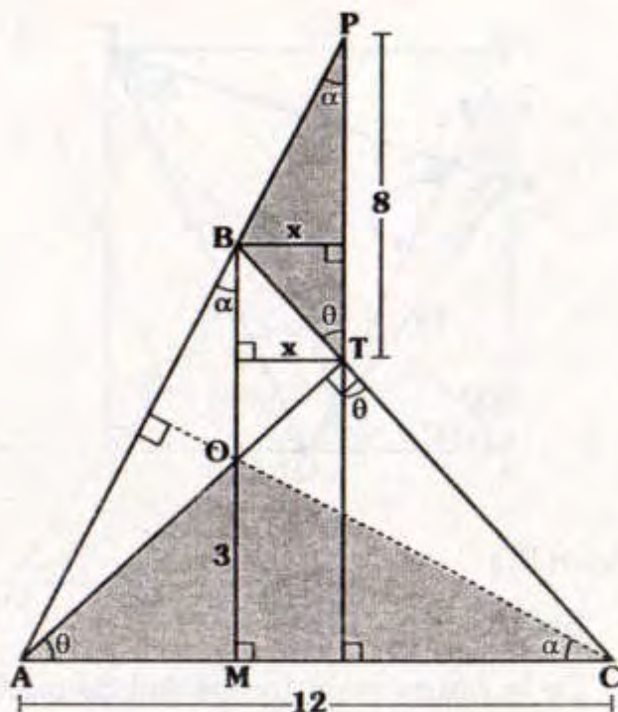
Clave C

Observación



Se cumple que **E** es excentro del ΔABC.

RESOLUCIÓN Nº 277



Nos piden x.

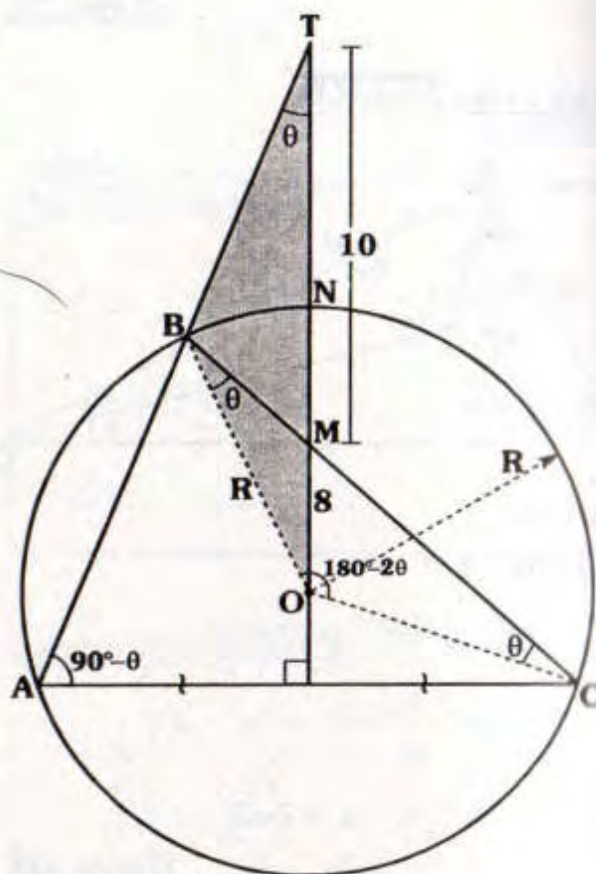
Notamos que ΔAOC ~ ΔTBP, comparemos elementos homólogos:

$$\frac{x}{3}=\frac{8}{12}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 278



Piden R.

- Sea m∢OBC = θ

$\Rightarrow$ m∢BOC = 180° − 2θ

$\Rightarrow$ m∢BAC = 90° − θ

$\Rightarrow$ m∢ATO = θ

- En ΔOBT :

$$R^2 = 8(18)$$

$$\therefore \quad \mathbf{R=12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 279

Nos piden x.

- Sea m∢TAB = α y m∢APT = θ
- En ⊿OPQ: $\Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 90°$
- Como m∢ITP = $\alpha + \theta$

  $\Rightarrow$ m∢BTP = $\alpha + \theta$
- Luego $\overline{TP}$ es bisectriz exterior del ⊿ATP

  $\Rightarrow$ x= 5m y AP=12m
- 12m=5m+13

$$\Rightarrow m = \frac{13}{7} \qquad \therefore \mathbf{x = \frac{65}{7}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 280

Nos piden x.

- Notemos que el ⏢MPQT y ⏢MHQN son inscritos

  $\Rightarrow$ m∢MNQ = m∢QHP y

  m∢MPQ = m∢QTN

  $\Rightarrow \Delta HPQ \sim \Delta NTQ$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2a}{a}$$

$$\therefore \mathbf{x = 6}$$

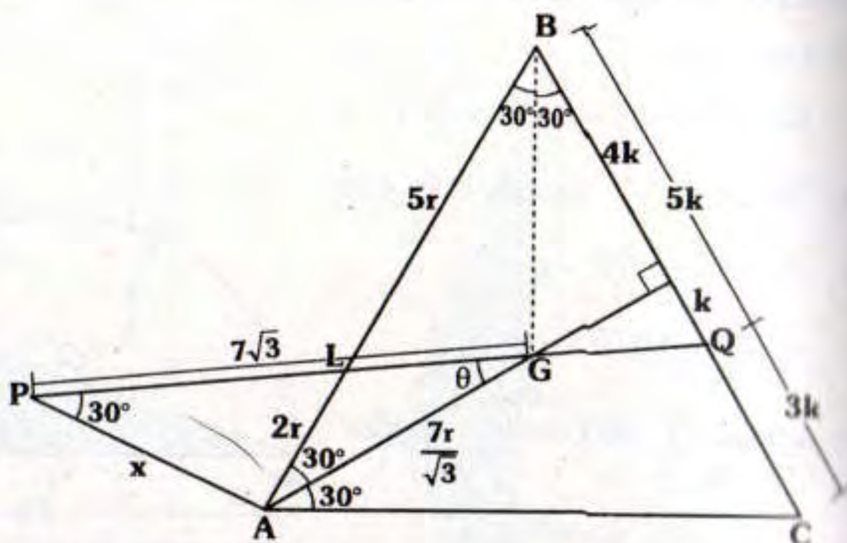
Clave A

RESOLUCIÓN Nº 281

Piden x.

- Por teorema (pág. 37)

$$\frac{AL}{LB}+\frac{3\cancel{k}}{5\cancel{k}}=1 \Rightarrow \frac{AL}{LB}=\frac{2}{5}$$



- $\triangle AGB$: $AG=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{7r}{\sqrt{3}}$

- $\triangle ALG \sim \triangle PGA$

$$\Rightarrow \frac{x}{2r}=\frac{7\sqrt{3}}{\left(\frac{7r}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=6}$$

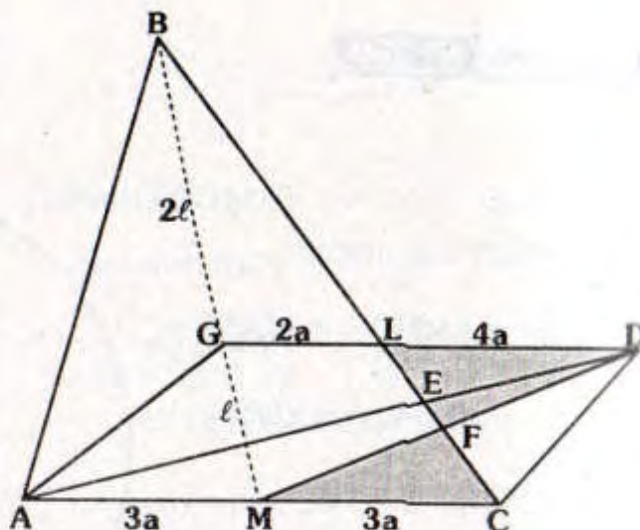
Clave A

RESOLUCIÓN Nº 282

Nos piden: $\frac{AE}{ED}-\frac{MF}{FD}$

- Sea AM=MC=3a

- $\triangle MBC \sim \triangle GBL$



$$\Rightarrow \frac{GC}{MC}=\frac{2}{3} \Rightarrow GC=2a \text{ y } MC=3a$$

$$\Rightarrow LD=4a$$

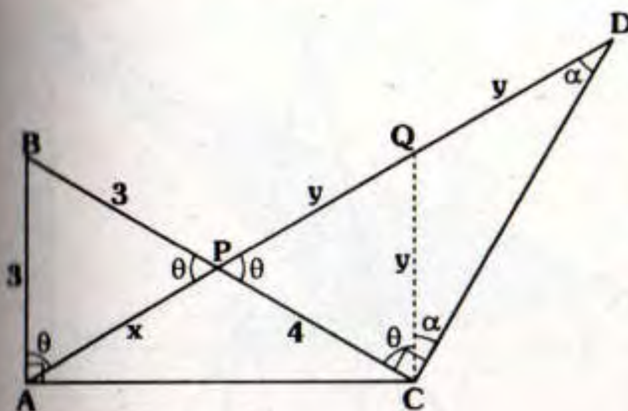
- $\triangle MFC \sim \triangle DFL \Rightarrow \frac{MF}{FD}=\frac{3}{4}$

- $\triangle AEC \sim \triangle DEL \Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{6a}{4a}=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \frac{AE}{ED}-\frac{MF}{FD}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{AE}{ED}-\frac{MF}{FD}=\frac{3}{4}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 283



Piden (AP)(PD)

- Como $\triangle$ABP es isósceles

$\Rightarrow$ m∢BAP = m∢APB = θ

- En ⊿PCD, se traza la mediana CQ
$\Rightarrow$ PQ=QD=QC=y

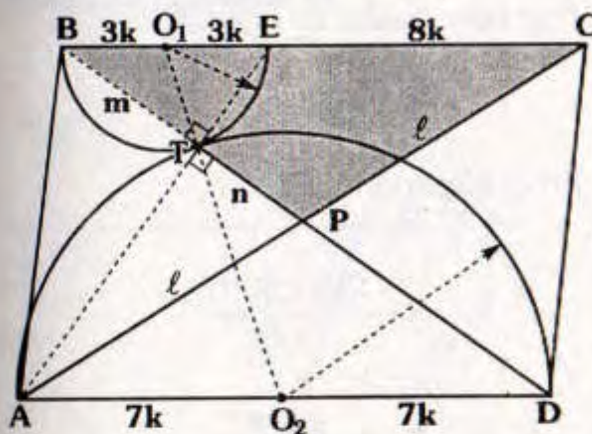
- ⊿ABP ~ ⊿PQC $\Rightarrow$ $\frac{x}{4} = \frac{3}{y}$

$\Rightarrow$ xy = 12

$\therefore$ **(AP)(PD) = 24**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 284



Piden $\frac{TP}{PD}$.

- Notemos que O_1, T y O_2 son colineales

$\Rightarrow$ m∢TO_2D = m∢TO_1B

$\Rightarrow$ m$\overset{\frown}{BT}$ = m$\overset{\frown}{TD}$

- También: E, T y A : colineales
- En $\triangle$DBC, teorema de Menelao:

$m8k\ell = n6k2\ell \Rightarrow 2m = 3n$

$\Rightarrow$ m = 3k y n = 2k

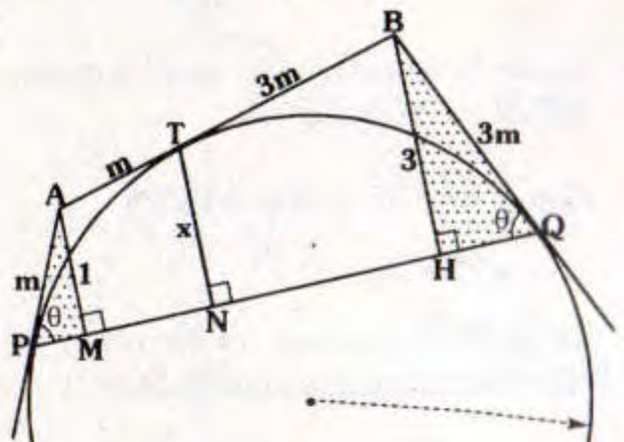
- Como BP = PD $\Rightarrow$ PD = 5k

$\Rightarrow \frac{TP}{PD} = \frac{2k}{5k}$

$\therefore$ $\mathbf{\frac{TP}{PD} = \frac{2}{5}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 285



Piden x.

- ⊿PMA ~ ⊿QHB

$\Rightarrow$ AP=m y BQ=3m

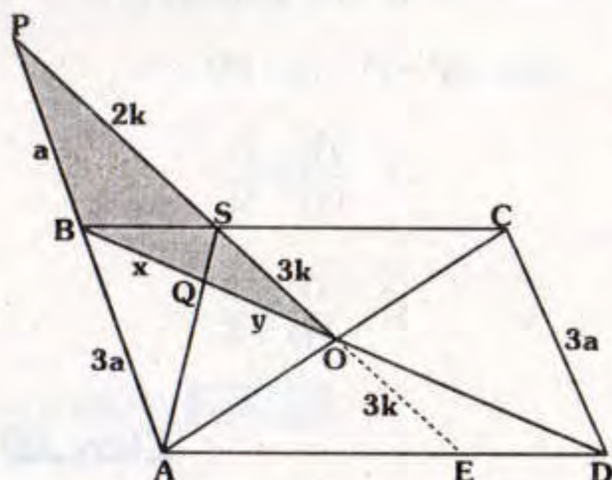
- En el trapecio MABH:

$$x=\frac{(1)(3m)+(3)(m)}{m+3m}$$

$\therefore\ \mathbf{x=1,5}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 286



Piden $\frac{x}{y}$.

- Como O es centro del paralelogramo ABCD $\Rightarrow$ SO=OE=3k

- Como $\overline{BS}//\overline{AE}$ y AB=3(BP)

  $\Rightarrow$ PS=2k

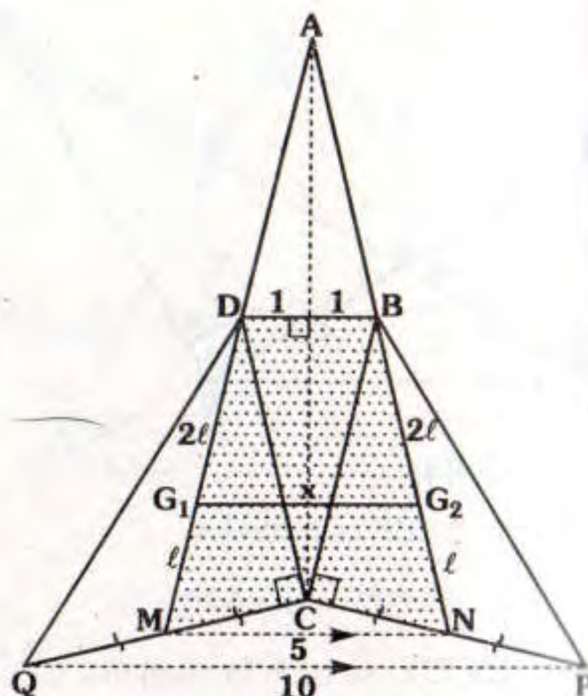
- En ΔBPO, usemos el teorema de Menelao, la recta secante es SQA

  $\Rightarrow\ x(3k)(4a)=y(2k)(3a)$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 287



Piden x.

- Sean G_1 y G_2 baricentros de los triángulos BCP y DCQ respectivamente.

  $\Rightarrow \overline{DM}$ y $\overline{BN}$ son medianas y

  $DG_1=2(G_1M)$ y $BG_2=2(G_2N)$

- Por base media en el ΔQCP:

  MN=5

- En el trapecio MDEN:

$$x=\frac{2(\ell)+5(2\ell)}{\ell+2\ell}$$

$\therefore\ \mathbf{x=4}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 288

- Por propiedad de circunferencia:

$$m\sphericalangle BPL = 45° \Rightarrow m\widehat{BL} = 90°$$

$$\Rightarrow BL = r\sqrt{2}$$

- Como $AB = R\sqrt{2}$, $BL = \sqrt{2}$ y

$$m\sphericalangle ABL = m\sphericalangle OBO_1$$

$$\Rightarrow \triangle OBO_1 \sim \triangle ABL$$

$$\Rightarrow \frac{AL}{a} = \frac{r\sqrt{2}}{r}$$

$$\therefore \mathbf{AL = a\sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 289

❖ Piden x/y.

- Como G es baricentro del $\triangle TMH$

$$\Rightarrow TN = NH$$

- Por teorema de la tangente:

$$m^2 = (NS)(NM)$$

- En $\triangle MHN$: por el propiedad (pág. 25)

$$m\sphericalangle NHS = m\sphericalangle SMC = \alpha$$

$$\Rightarrow \overline{LC} // \overline{TH}$$

- En $\triangle TMH$: $\frac{x}{y} = \frac{m}{m}$

$$\therefore \mathbf{\frac{x}{y} = 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 290

❖ Piden AE/EB.

- Por teorema de Blanchet

$$m\sphericalangle AHM = m\sphericalangle MHB$$

- $\triangle AHM \sim \triangle BHM$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{n}=\frac{n}{m} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{n^2}{m}$$

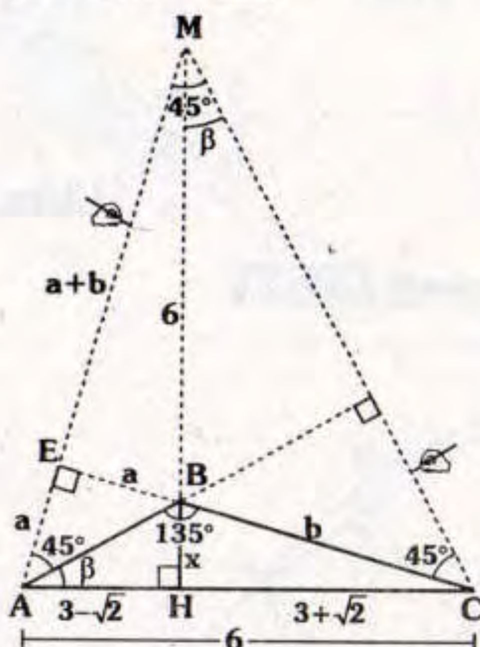
- En $\triangle$AHB, por teorema de la bisectriz:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{m}{x}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{AE}{EB}=\frac{m^2}{n^2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 291



Nos piden x.

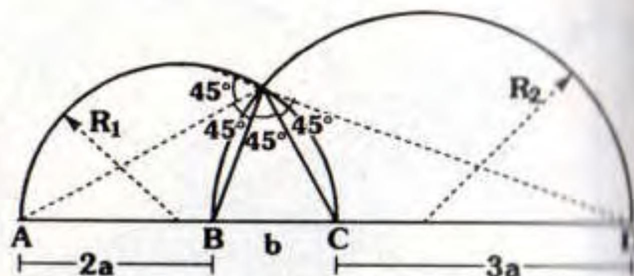
- Ubicamos el ortocentro **M** del $\triangle$ABC
- $\triangle$AEC ≅ $\triangle$BEM ⇒ MB=AC=6
- $\triangle$AHB ~ $\triangle$MHC:

$$\frac{x}{3-\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{x+6} \quad \Rightarrow \quad x(x+6)=7$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 292



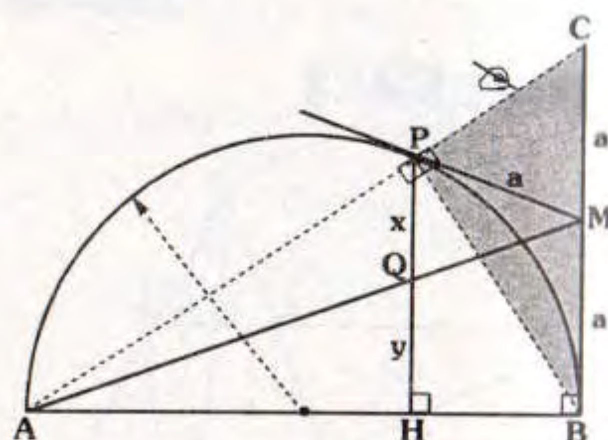
Nos piden $\frac{R_1}{R_2}$.

- Se observa $\frac{R_1}{R_2}=\frac{AC}{BD}$
- Notamos también que: A, B, C y D forman una cuaterna armónica

$$\Rightarrow \quad \frac{2a}{b}=\frac{5a+b}{3a} \quad \Rightarrow \quad a=b$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{R_1}{R_2}=\frac{AC}{BD}=\frac{3a}{4a}=\frac{3}{4}}$$

RESOLUCIÓN Nº 293



Piden x/y.

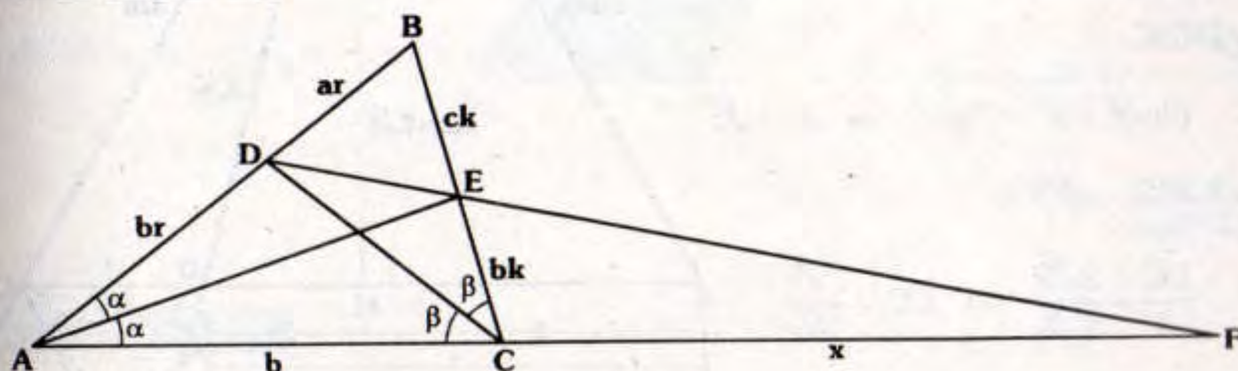
- Notemos que $\overline{PM}$ es la mediana del $\triangle$BPC.

- $\triangle$AHP ~ $\triangle$ABC $\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{a}$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = 1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 294



Nos piden x.

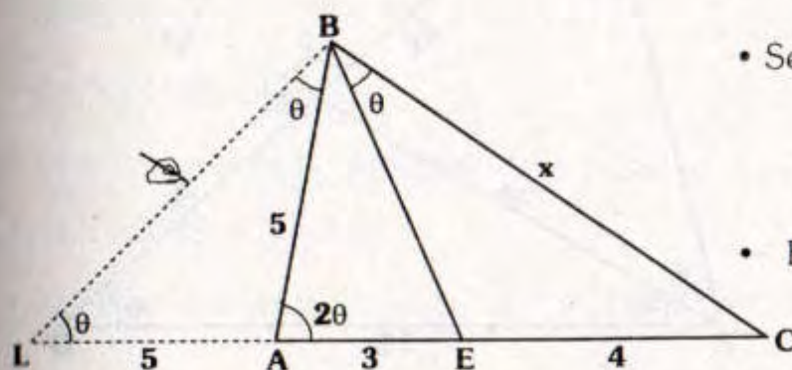
- Por teorema de la bisectriz: AD=br; DB=ar; BE=ck y EC=bk
- $\triangle$ABC, por teorema de Menelao (recta secante: $\overleftrightarrow{DEF}$)

$$x(ck)(br) = (ar)(bk)(x+b)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{ab}{c-a}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 295



Nos piden x.

- Se prolonga $\overrightarrow{CA}$ tal que:

$$m\measuredangle ALB = \theta$$

$\Rightarrow \triangle$LAB: isósceles $\Rightarrow$ AL=5

- En $\triangle$LBC, por propiedad:

$$x^2 = (4)(12)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4\sqrt{3}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 296

Piden x.

- $\triangle ABC$, se traza la altura $\overline{BM}$

  $\Rightarrow AM=MC=5 \Rightarrow MD=3$

- $⊿MBC$, por teorema de la bisectriz:

  $BM=2m$ y $BC=3m$

- $⊿MBC$:

  $(2m)^2+5^2=(3m)^2 \Rightarrow m=\sqrt{5}$

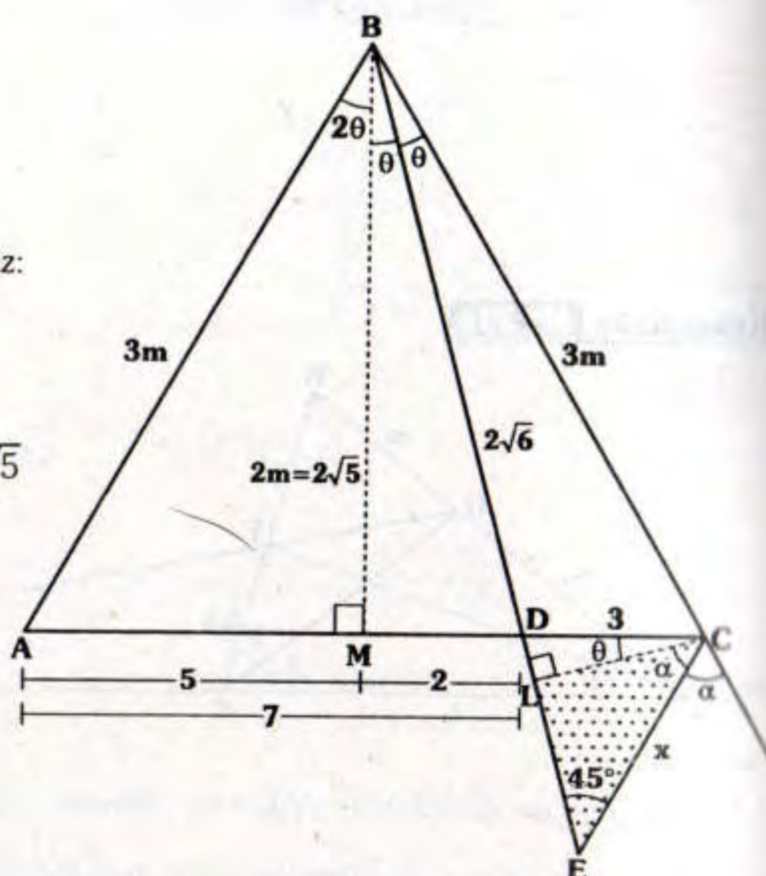
- $⊿DMB \sim ⊿DLC$

  $\dfrac{LC}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \Rightarrow LC=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

- $⊿BLC$:

  $x=(LC)\sqrt{2}$

  $\therefore$ $\mathbf{x=\sqrt{15}}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 297

Nos piden AM.

- $\triangle AMD \sim \triangle HMC$

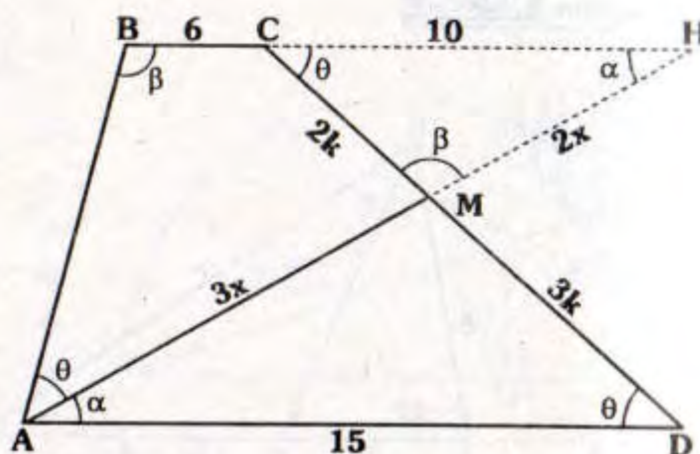
  $\Rightarrow AM=3x,\ MH=2x$ y $HC=10$

- $\triangle MCH \sim \triangle BAH$

  $\Rightarrow \dfrac{(2x)}{10}=\dfrac{16}{(5x)} \Rightarrow x=4$

- Como $AM=3x$

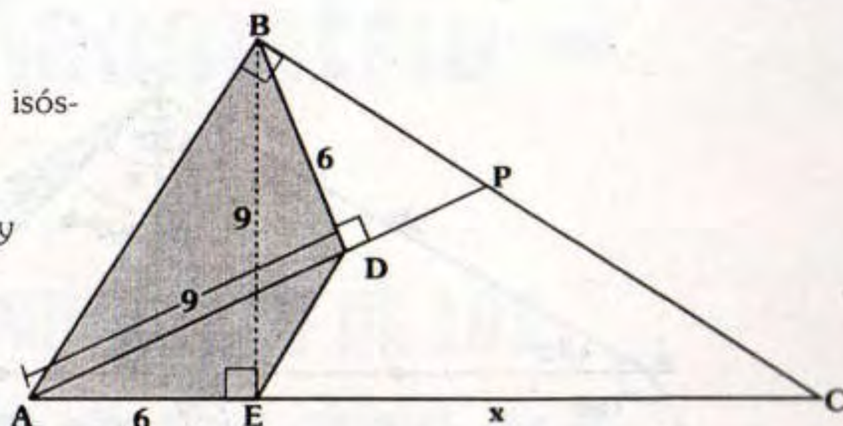
  $\therefore$ $\mathbf{AM=12}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 298

Piden x.



- Como ABDE es un trapecio isósceles:

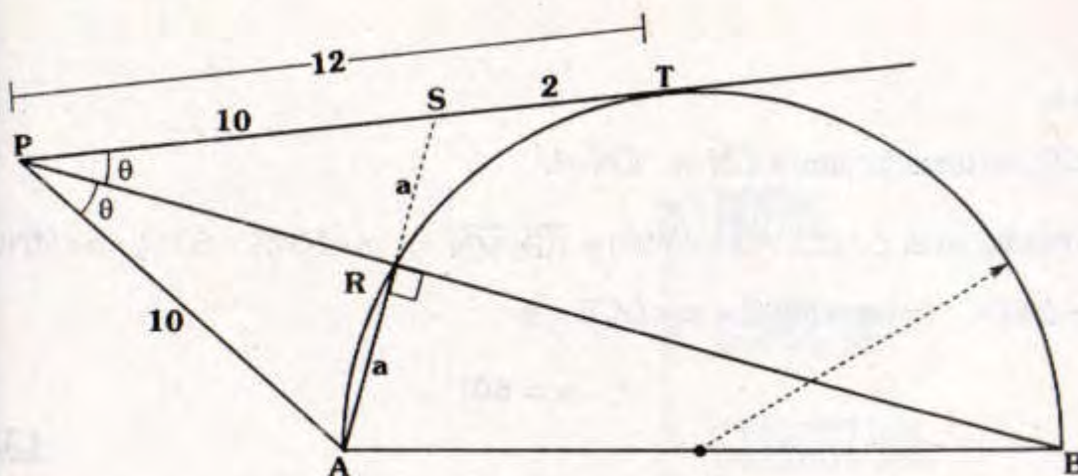
  $\Rightarrow AE = BD = 6,\ AD = BE = 9$ y $m\measuredangle AEB = 90°$

- $\triangle ABC$: $9^2 = (6)(x)$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 13,5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 299



Nos piden PB.

- ΔAPS: isósceles
- Por teorema de la tangente: $2^2 = a(2a) \Rightarrow a = \sqrt{2}$
- En $\triangle PRS$: $PR = 7\sqrt{2}$
- Por teorema de la tangente: $12^2 = \left(7\sqrt{2}\right)(PB)$

$$\therefore \quad \mathbf{PB = \frac{72}{7}\sqrt{2}}$$

Clave B

Resolución Nº 300

Nos piden x.

- En $\triangle BCD$, se traza la altura $CN \Rightarrow CN=b$
- Por base media en el $\triangle ABD$: $AB=2(MN)$ y $\overline{AB}//\overline{MN} \Rightarrow m\measuredangle MNB = 60°$ y $m\measuredangle MNC = 150°$
- $\triangle MNC \sim \triangle EDC \Rightarrow m\measuredangle MNC = m\measuredangle DCE = \phi$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

❖❖❖❖❖

Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

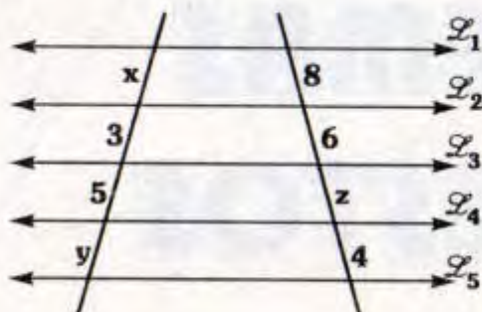


Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}\,\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_5}$, calcule $x+y+z$.



A) 10 B) 12 C) 18

D) 16 E) 20

PROBLEMA Nº 2

Se tiene el trapecio ABCD, se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{CD}$ tal que $\overline{AD}//\overline{PQ}//\overline{BC}$. Si $AP=x+3$; $PB=x+1$; $CQ=x+2$ y $QD=x+5$. Calcule x.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 3

En un triángulo ABC, se ubica E en $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$ tal que $\overline{EF}//\overline{AC}$. Si $AE=7$, $FC=10$ y $EB=14$. Calcule BF.

A) 10 B) 20 C) 25

D) 30 E) 35

PROBLEMA Nº 4

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $\overline{BG}//\overline{AF}$, $CG=3$, $GF=EF=2$ y $ED=x+1$. Calcule x.

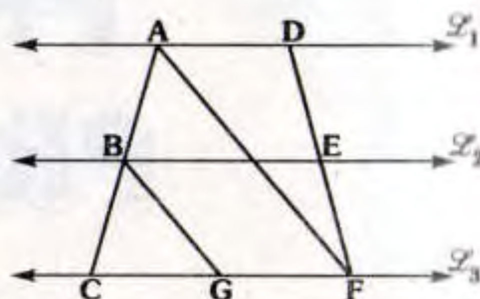
A) 1/2

B) 1/3

C) 1/4

D) 1/5

E) 1/6



PROBLEMA Nº 5

En el triángulo ABC, se ubican los puntos P, Q y F en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BQ}$ respectivamente. Si $\overline{PF}//\overline{AQ}$, $\overline{PQ}//\overline{AC}$, $BF=3$, $FQ=4$. Calcule QC.

A) 5 B) 7 C) $\frac{21}{4}$

D) $\frac{28}{3}$ E) $\frac{30}{7}$

PROBLEMA Nº 6

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la ceviana interior $\overline{AM}$ secantes en E. Si $BE=ED$, $BM=3$ y $MC=5$. Halle AB.

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 7

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BP tal que m∢PBC = m∢BCA, AB=1 y BC=2. Calcule BP.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA Nº 8

En el triángulo ABC, se ubica P en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AC}$. Si m∢BAC = 80°, AQ=5, AB=4, QC=3 y PC=3(BP).

Calcule m∢PQC.

A) 80° B) 90° C) 100°

D) 120° E) 130°

PROBLEMA Nº 9

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$.

Calcule DF.

A) 10

B) 5

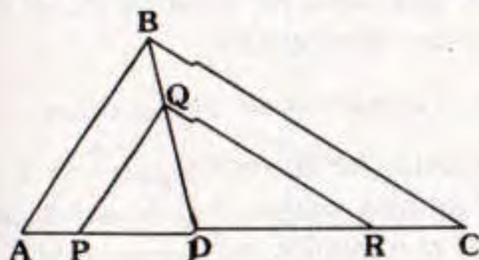
C) 11

D) 12

E) 13

PROBLEMA Nº 10

En el gráfico, $\overline{AB} // \overline{PQ}$, $\overline{BC} // \overline{QR}$, AP=3, PD=4 y DR=5. Calcule RC

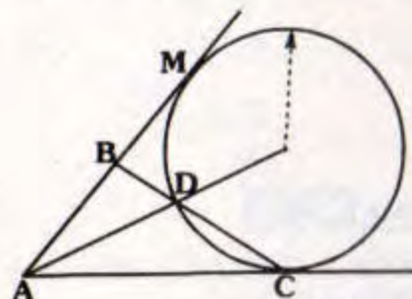


A) $\frac{11}{4}$ B) $\frac{13}{4}$ C) $\frac{15}{4}$

D) $\frac{17}{4}$ E) $\frac{19}{4}$

PROBLEMA Nº 11

En el gráfico, M y C son puntos de tangencia. Si AB=6 y BM=4. Calcule BD/DC.



A) 3/2 B) 3/4 C) 3/5

D) 2/3 E) 4/5

PROBLEMA Nº 12

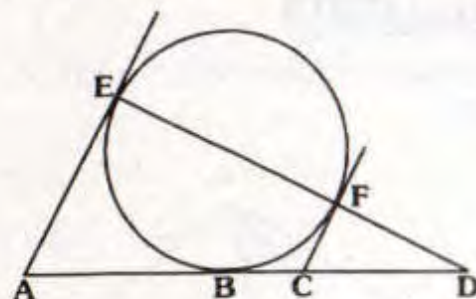
En el triángulo ABC, I es incentro y E es excentro relativo a $\overline{BC}$. Si $\overline{IE} \cap \overline{BC} = \{M\}$, IM=4 y ME=12. Calcule AI.

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 13

En el gráfico, E y F son puntos de tangencia. Si AB=6 y CD=4. Calcule BC.

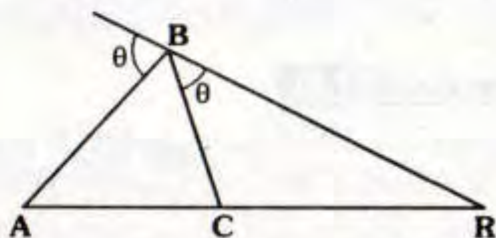


A) 2 B) 1,8 C) 2,5

D) 3,5 E) 3

PROBLEMA Nº 14

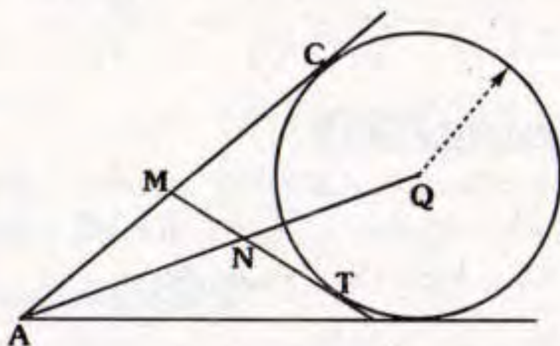
En el gráfico, AB=14, BC=10 y AC=6. Calcule RC.



A) 10 B) 15 C) 7,5
D) 12,5 E) 5

PROBLEMA Nº 15

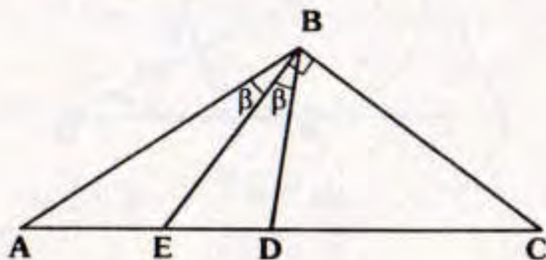
En el gráfico, AM=MC, MN=a y NT=b. Calcule NQ/AN.



A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a+b}{a}$
D) $\frac{a+b}{b}$ E) $\frac{a^2}{b^2}$

PROBLEMA Nº 16

En el gráfico, 2(AB)=3(BD) y ED=6. Calcule AC.

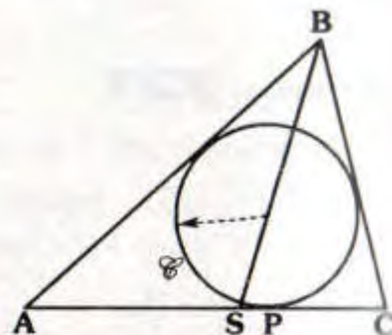


A) 45 B) 42 C) 39
D) 36 E) 30

PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, si AB=30, BC=26 y AC=28. Calcule SP.

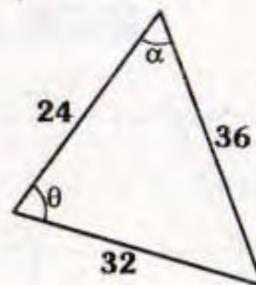
A) 0,8
B) 0,5
C) 1
D) 1,5
E) 2

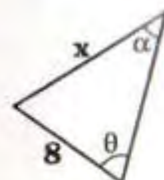


PROBLEMA Nº 18

En el gráfico, calcule x.

A) 9
B) 4
C) 3
D) 3,5
E) 5





PROBLEMA Nº 19

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos polígonos de igual cantidad de lados son semejantes.

II. Dos cuadrados son semejantes.

III. Los lados de un rectángulo son 1 y 3 y los de otro miden 3 y 6, entonces dichos rectángulos son semejantes.

A) VVV B) FFF C) VFV

D) FVF E) VVF

PROBLEMA Nº 20

En el gráfico, BC=20 y (AB)(MB)=120. Calcule BN.

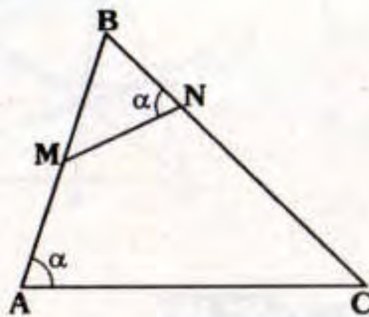
A) 2,5

B) 4

C) 6

D) 3

E) 5



PROBLEMA Nº 21

Del gráfico, calcule x.

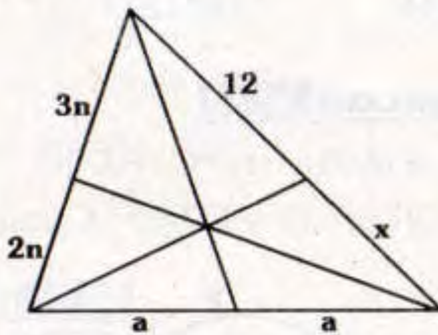
A) 10

B) 6

C) 8

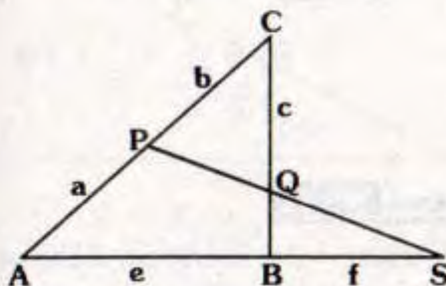
D) 12

E) 9



PROBLEMA Nº 22

Indique la expresión correcta en:



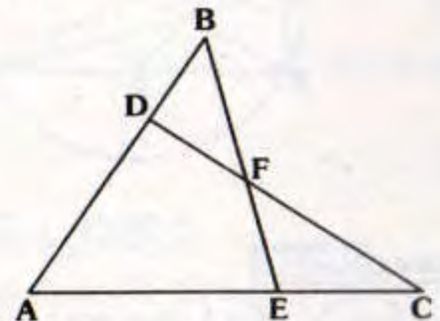
A) abc=edf B) acf=bde

C) acf=bde D) acf=bd(e+f)

E) acf=ed(f+d)

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico AD=6(DB) y AE=EC. Calcule BF/FE.

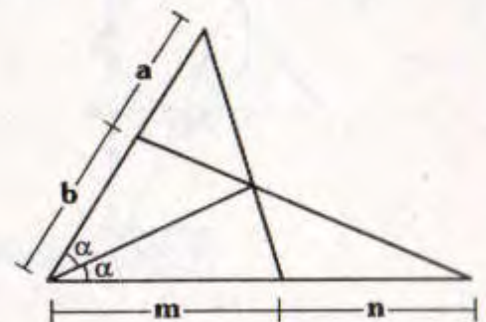


A) 1/6 B) 1/3 C) 1/2

D) 2/5 E) 2/3

PROBLEMA Nº 24

Indique la expresión correcta:



A) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{a+b}{m+n}$

B) $\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{m+n}{n}\right)=\frac{a+b}{m+n}$

C) ab=mn

D) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m+n}{m-n}\right)=\frac{a+b}{m+n}$

E) am=bn

PROBLEMA Nº 25

En un gráfico BN=3 y BP=4. Calcule la medida del arco AB.

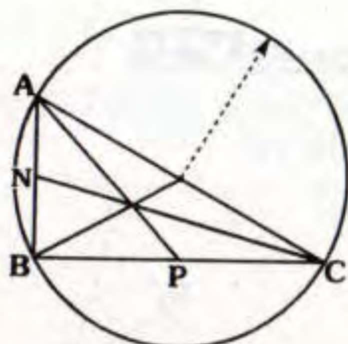
A) 37°

B) 74°

C) 106°

D) 74°

E) 90°



PROBLEMA Nº 26

En el gráfico, M, N y L son puntos de tangencia. Si BC=10 y LB=5. Calcule AL.

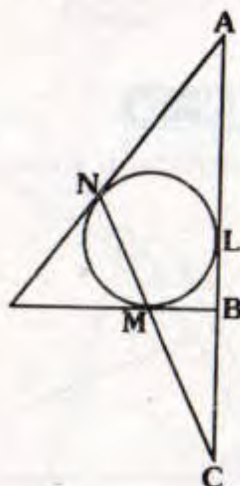
A) 3

B) 14

C) 7,5

D) 5

E) 1



PROBLEMA Nº 27

Se tiene el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BE. D y F son puntos de la región exterior tal que $\overline{DA} // \overline{FE}$ y D, F y C son colineales. Si AB=10, BC=14 y AD=6. Calcule EF.

A) 2,5 B) 3

C) 7 D) 4,5

E) 3,5

PROBLEMA Nº 28

En el gráfico, AR=2, RC=5 y CQ=6. Calcule AP.

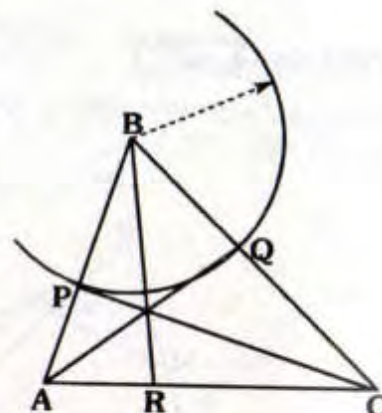
A) 1/6

B) 1/3

C) 12/5

D) 24/5

E) 10/3



PROBLEMA Nº 29

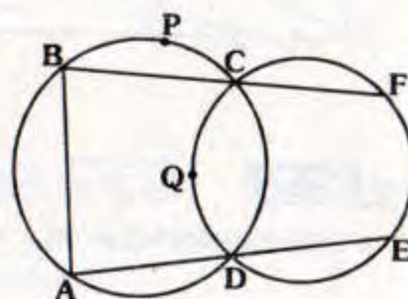
En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD y la mediana BM. Si AB=8, BC=12 y DM=1,5. Calcule AC.

A) 12 B) 14 C) 15

D) 16 E) 18

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, $m\widehat{BPC}=m\widehat{CQD}$, (BC)(CE)=18 y CD=6. Calcule AC.



A) 3 B) 9 C) 4

D) 6 E) 2

PROBLEMA Nº 31

Por el incentro I del triángulo ABC se traza una recta paralela a $\overline{AC}$, que interseca a

$\overline{BC}$ en P. Si AB=10, BC=12 y AC=11, calcule PC.

A) 2 B) 3 C) 3

D) $\frac{11}{3}$ E) 4

PROBLEMA Nº 32

En un triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la altura BH y la mediana AM, las cuales se cortan en N. Calcule AN/NM.

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{4}{5}$ E) 1

PROBLEMA Nº 33

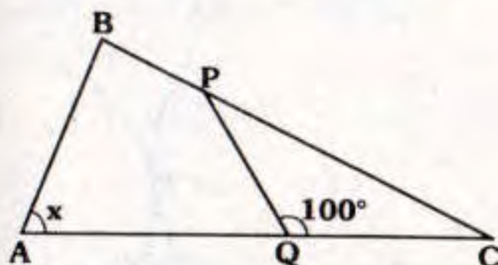
En un cuadrado se ubica H en la prolongación de $\overline{BA}$, tal que $\overline{CH}$ corta a $\overline{AD}$ en M. AH=3 y AM=2. Calcule el perímetro de la región cuadrada.

A) 26 B) 16 C) 12

D) 24 E) 28

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico mostrado, PC=3(BP), si $\frac{AB}{4}=\frac{AQ}{5}=\frac{QC}{3}$. Calcule x.



A) 20° B) 30° C) 40°

D) 80° E) 50°

PROBLEMA Nº 35

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos triángulos isósceles son semejantes.

II. Dos triángulos equiláteros son semejantes.

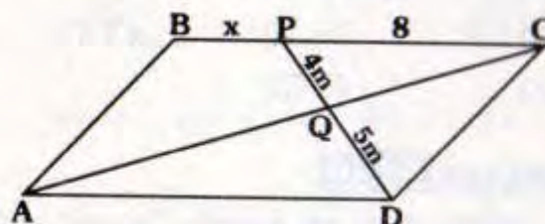
III. Dos rectángulos son siempre semejantes.

A) VVV B) FFF C) FVV

D) FVF E) VVF

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, calcule x.

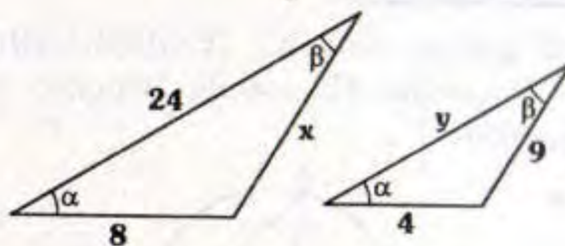


A) 2,5 B) 4 C) 3

D) 3,5 E) 2

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, calcule x e y.



A) 18 y 12 B) 18 y 10

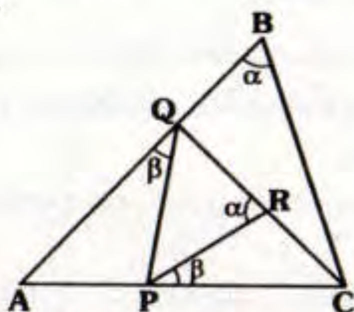
C) 16 y 10 D) 16 y 14

E) 10 y 6

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, BC=3(QR) y PR=3. Calcule AB.

A) 6
B) 8
C) 7
D) 9
E) 10



PROBLEMA Nº 39

En un paralelogramo ABCD, se traza una recta que pasa por A y corta a CD en E y a la diagonal BD en F, si CD=30 y BF=3(FD). Calcule EC.

A) 20 B) 25 C) 15
D) 10 E) 30

PROBLEMA Nº 40

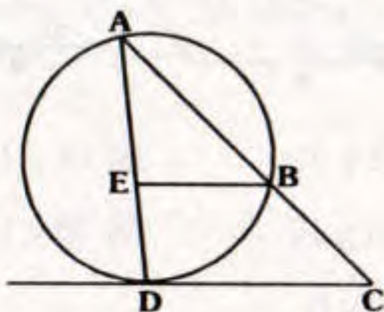
Un edificio mide 45 metros, proyecta una sombra de 60 metros. ¿Cuál será la sombra proyectada por un árbol de 6 metros a la misma hora?

A) 6m B) 8m C) 7m
D) 9m E) 10m

PROBLEMA Nº 41

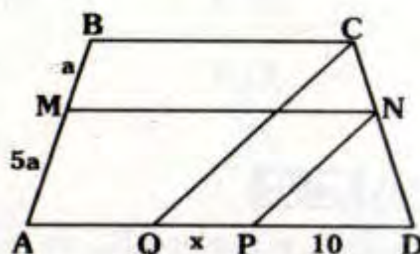
En el gráfico, $\overline{EB}//\overline{DC}$, (EB)(DB)=20 y BC=5, calcule AE, siendo D punto de tangencia.

A) 4
B) 5
C) 7
D) 3
E) 6



PROBLEMA Nº 42

Si $\overline{BC}//\overline{MN}//\overline{AD}$ y $CQ//\overline{NP}$, halle x.

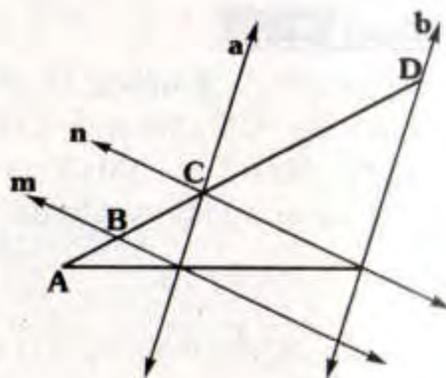


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 43

Si: $\overleftrightarrow{m}//\overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{a}//\overleftrightarrow{b}$, calcule CD, si AB=5 y BC=3.

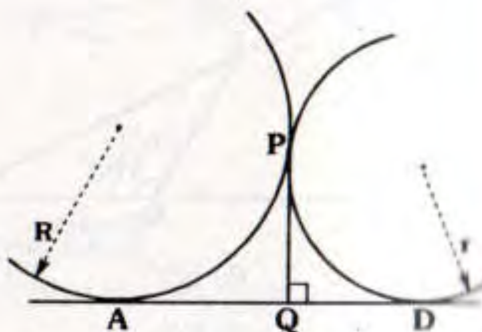
A) 2,4
B) 2
C) 3,4
D) 4,8
E) 3,2



PROBLEMA Nº 44

En el gráfico, A, P y D son puntos de tangencia. Si R=6 y r=3, calcule PQ.

A) 4
B) 2
C) 3
D) 4,5
E) 3,5



PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, AP=6 y AR=3. Calcule RC

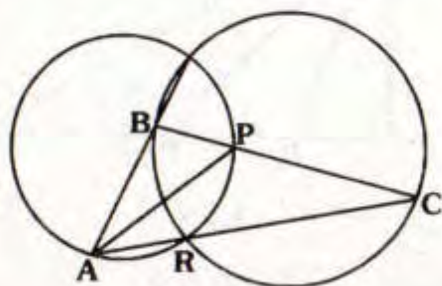
A) 9

B) 18

C) 12

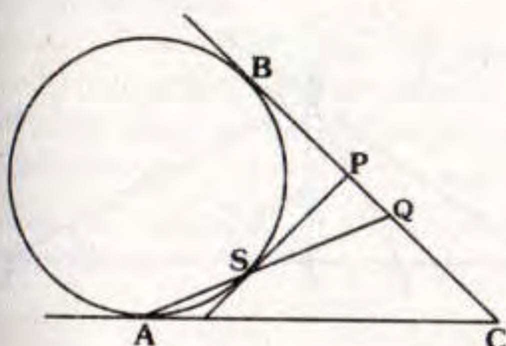
D) 15

E) 10



PROBLEMA Nº 46

En el gráfico A, S y Q son puntos de tangencia. Si BP=3 y PQ=2, calcule QC.



A) 10 B) 6 C) 8

D) 12 E) 9

PROBLEMA Nº 47

En el triángulo ABD, se ubica C en $\overline{AD}$, si $3(AC)=2(CD)$, $BC=6$ y $m\measuredangle CBD = m\measuredangle DAB + m\measuredangle ADB$.

Calcule AB.

A) 8 B) 9 C) 10

D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, BM=2 y MC=6.

Calcule RC/AR.

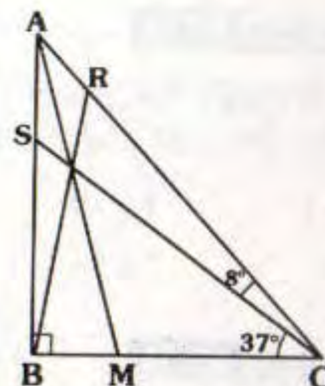
A) 1/3

B) 10/3

C) 9

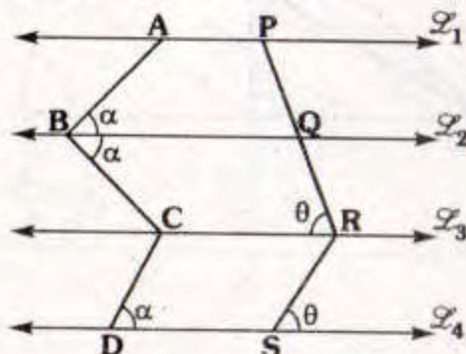
D) 9/2

E) 6



PROBLEMA Nº 49

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$. Si $BC=3(AB)+2$; $QR=2(RS)+1$ y $CD=3(PQ)=6$. Calcule AB.



A) 3 B) 4 C) 3,5

D) 4,5 E) 5

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, ABCD es un rectángulo, DE=a y BF=b. Calcule HQ.

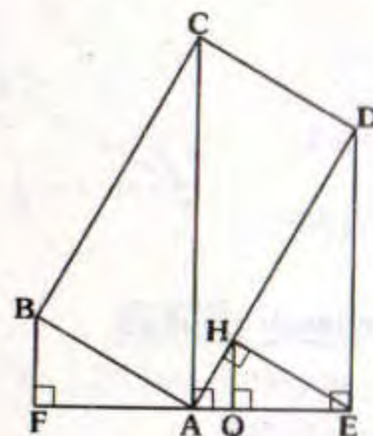
A) $\sqrt{ab}$

B) $2\sqrt{ab}$

C) $\dfrac{ab}{a+b}$

D) $\dfrac{2ab}{a+b}$

E) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$



PROBLEMA Nº 51

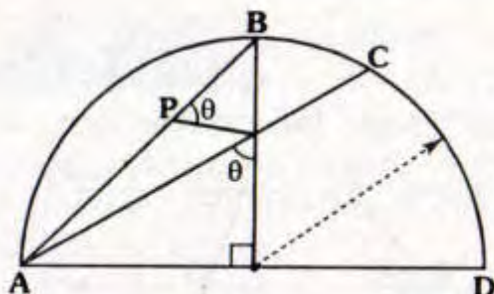
En el triángulo ABC, m∢BAC=2(m∢BCA), AB=8 y AC=10. Calcule BC.

A) 9 B) 10 C) 12

D) 14 E) 15

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, $m\widehat{CD}=74°$, calcule AP/PB.



A) 1 B) $\frac{25}{7}$ C) $\frac{25}{4}$

D) $\frac{25}{8}$ E) $\frac{25}{3}$

PROBLEMA Nº 53

En el gráfico 4(AB)=5(BC).
Calcule AE/ER.

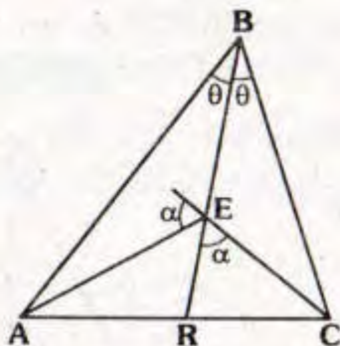
A) 7/4

B) 3/2

C) 2

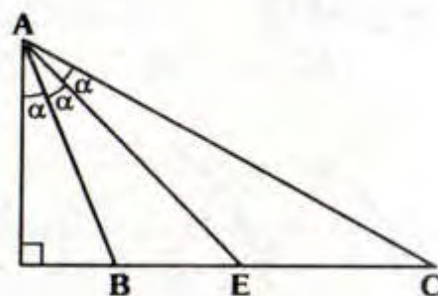
D) 9/4

E) 12/7



PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, AB=5 y AC=9.
Calcule BE.

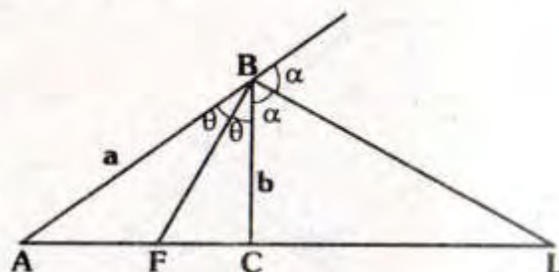


A) 6/7 B) 2 C) 15/7

D) 12/7 E) 9/7

PROBLEMA Nº 55

En el gráfico, M es punto medio de $\overline{FL}$.
Halle MA/MB.



A) 1 B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{b^2}{a^2}$

D) $\frac{b^3}{a^3}$ E) $\sqrt{\frac{b}{a}}$

PROBLEMA Nº 56

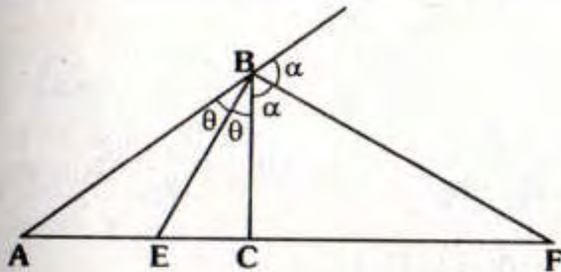
Se tiene el cuadrado ABCD de centro O, se ubica P en la prolongación de $\overline{AD}$, si $\overline{OP} \cap \overline{CD} = \{M\}$ y OM=MP.
Calcule CM/AP.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 57

En el gráfico, $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{1}{2}$. Calcule AC.



A) 4 B) 2 C) 3

D) 1 E) 5

PROBLEMA Nº 58

Se tiene el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, en los triángulos AMB y BMC se trazaron las alturas ML y MS respectivamente.

Si $m\measuredangle LMB = m\measuredangle SMC$ y $MC=8(AM)=8$. Calcule AB.

A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $3\sqrt{2}$

D) 4 E) 6

PROBLEMA Nº 59

En el gráfico, ABCD es cuadrado de centro **O**. Si $FO=\sqrt{2}$, calcule AB.

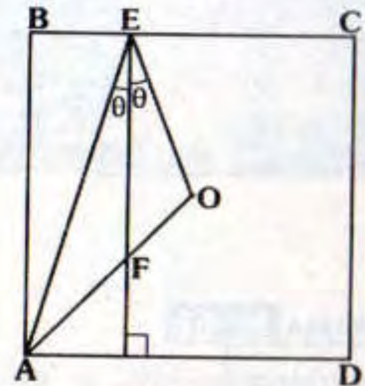
A) 4

B) 6

C) 8

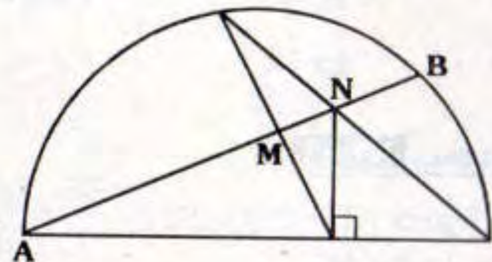
D) 10

E) 12



PROBLEMA Nº 60

En el gráfico, AM=a y MN=b. Calcule NB.



A) $\frac{a(a+b)}{a-b}$ B) $\frac{(a-b)a}{a+b}$

C) $\frac{b(a-b)}{a+b}$ D) $\frac{b(a+b)}{a-b}$

E) $\frac{ab}{a+b}$



Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 61

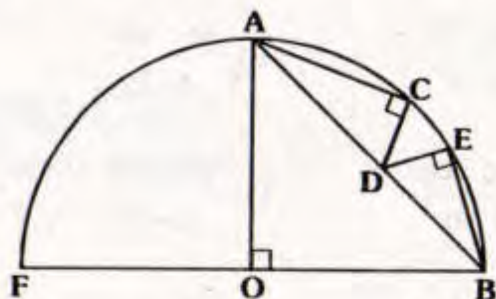
En un triángulo ABC se traza una recta paralela al lado $\overline{AC}$ que intercepta al lado $\overline{AB}$ en el punto P, a la mediana $\overline{AM}$ en el punto Q y al lado $\overline{BC}$ en el punto R. Si PQ=2 cm y QR=5 cm. Calcule AC en cm.

A) 7 B) 8 C) 9

D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 62

De la figura AO=OB=OF, si $\dfrac{BE}{7}=\dfrac{DE}{3}$ y DC=4. Halle AC.



A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 63

Se tiene al triángulo ABC, AB>BC, AB=k_1 y BC=k_2. y Se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}\,(P \in AC)$, luego se traza $\overline{PQ}\,//\,\overline{BC}(Q \in AB)$. Halle PQ.

A) $\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ B) $\dfrac{k_1k_2}{k_1-k_2}$

C) $\dfrac{k_1k_2}{2k_1-k_2}$ D) $\dfrac{k_1(k_1+k_2)}{k_2}$

E) $\dfrac{k_2(k_1+k_2)}{k_1-k_2}$

PROBLEMA Nº 64

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}\,(D \in \overline{AC})$ y luego se traza $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}(E \in \overline{BC})$. Si DE=2cm, DC= 5cm y AC=8cm, entonces la suma de las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en cm es:

A) 6,5 B) 7 C) 8

D) 8,5 E) 9

PROBLEMA Nº 65

En un triángulo ABC, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{CM}$ tales que $\overline{BH} \cap \overline{CM} = E$. Si CE=4(EM) y EH= 2cm, entonces la longitud de $\overline{BE}$ en cm es:

A) 2 B) 3 C) 3,5

D) 4 E) 4,5

PROBLEMA Nº 66

En un triángulo ABC se inscribe una circunferencia tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P, Q y T respectivamente. La prolongación de $\overline{PQ}$ intercepta a la prolongación de $\overline{AC}$ en R. Si AP=m

y CQ=n (m>n), entonces $\overline{CR}$ mide:

A) $\dfrac{n(m+2n)}{m-n}$ B) $\dfrac{m(m+n)}{m-n}$

C) $\sqrt{mn}$ D) $\sqrt{\dfrac{m+n}{2}}$

E) $\dfrac{n(m+n)}{m-n}$

PROBLEMA Nº 67

En un triángulo ABC, se inscribe el cuadrado PQRS ($\overline{SR} \subset \overline{AC}$). Si la altura relativa al lado $\overline{AC}$ mide H y AC=b, entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es:

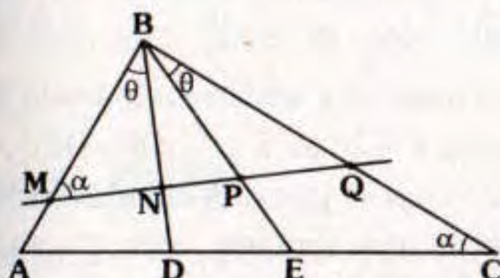
A) $\dfrac{3bH}{H+2b}$ B) $\dfrac{bH}{b+H}$

C) $\sqrt{Hb}$ D) $2\sqrt{Hb}$

E) $\dfrac{b+H}{2}$

PROBLEMA Nº 68

En la figura, $\overline{BE}$ es una mediana, MN=8. Halle NQ.

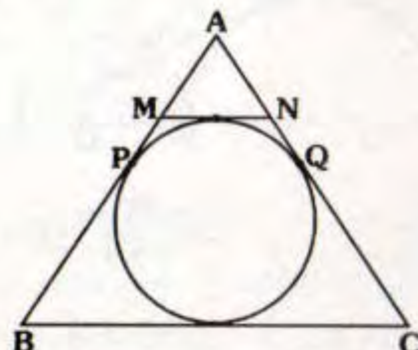


A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 16

PROBLEMA Nº 69

En la figura, AB=BC=a, AP=b y $\overline{MN} // \overline{BC}$. Calcule MN.



A) $\dfrac{b^2}{a+b}$ B) $\dfrac{ab}{a-b}$

C) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ D) $\dfrac{a^2}{a+b}$

E) $\dfrac{ab}{a+b}$

PROBLEMA Nº 70

En un triángulo ABC, AB=c, AC=b, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la bisectriz $\overline{AF}$ del $\measuredangle BAC$. Si $\overline{BM} \cap \overline{AF} = \{Q\}$, $\overleftrightarrow{CQ} \cap \overline{AB} = \{K\}$, calcule BK.

A) $\dfrac{bc}{b+c}$ B) $\dfrac{b^2}{b+c}$

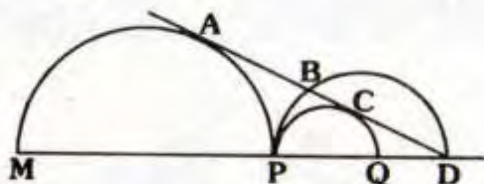
C) $\dfrac{b^2+c^2}{b+c}$ D) $\dfrac{c^2}{2b+c}$

E) $\dfrac{c^2}{b+c}$

PROBLEMA Nº 71

En la figura mostrada, los puntos A y C son puntos de tangencia y los segmentos

$\overline{MP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{PD}$ son diámetros de las semicircunferencias. Si AB=a, BC=b. Calcule CD.



A) $\frac{ab}{2a+b}$
B) $\frac{ab}{a+b}$
C) $\sqrt{ab}$
D) $\frac{b(a+b)}{a-b}$
E) $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

PROBLEMA Nº 72

En un paralelogramo ABCD (AB<BC), Q∈$\overline{AC}$, $\overline{QN}\perp\overline{AD}$, $\overline{QM}\perp\overline{AB}$(N∈$\overline{AD}$ y M∈$\overline{AB}$). Si QM=4cm, QN=3cm y BC=8cm, entonces la longitud de $\overline{AB}$ en cm es:

A) 4 B) 5 C) 5,5
D) 6 E) 7

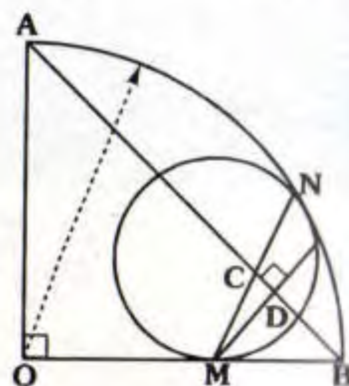
PROBLEMA Nº 73

En el triángulo ABC, se ubica el punto interior P tal que m∢PAC=m∢PBA=m∢PCB, se prolonga $\overline{AP}$ hasta el punto exterior Q, $\overline{BQ}//\overline{AC}$. Si AC=5cm, BQ=4cm. Calcule BC en cm.

A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{5}$
D) $\sqrt{22}$ E) 5

PROBLEMA Nº 74

En la figura, M y N son puntos de tangencia. Si AD.CD=6cm. Calcule MB.



A) $3\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $\sqrt{14}$
D) 4
E) 5

PROBLEMA Nº 75

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un triángulo acutángulo escaleno, la recta de Euler pasa por los puntos notables: ortocentro, incentro y circuncentro.

II. El incentro de un triángulo escaleno acutángulo es el ortocentro del triángulo determinado al unir los tres excentros del triángulo acutángulo.

III. Dos rectángulos son semejantes.

A) VVF B) FVV
C) FVF D) FFF
E) FFV

PROBLEMA Nº 76

ABCD es un trapecio en donde $\overline{AD}//\overline{BC}$, m∢ABC = 90°, BC<DA. Con diámetro $\overline{AB}$ se traza una semicircunferencia que intercepta a $\overline{CD}$ en E y F (DF>DE) y en $\overline{AB}$ se ubica el punto **G** de manera que m∢GFD = 90°, CF=8 μ, DF=2 μ; halle GF en μ.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 5 E) 7

PROBLEMA Nº 77

En la bisectriz exterior del vértice A de un triángulo ABC recto en B se ubica un punto D tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Si BD=2AB=6, halle AC.

A) 4 B) 5 C) 6

D) 4,5 E) 5,5

PROBLEMA Nº 78

ABCD es un trapecio rectángulo con, $m\measuredangle A = 90°$, $\overline{BC} // \overline{AD}$ (BC<AD). En la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto E tal que $\overline{ED} \cap \overline{BC} = \{F\}$. Sea L la recta que contiene a $\overline{AB}$ y con diámetros en L se trazan las semicircunferencias C_1 y C_2 de diámetros $\overline{EI}$ y $\overline{EG}$ tal que $C_1 \cap \overline{AD} = \{J\}$, $F \in C_1$, C y $D \in C_2$ y EC=10μ.

Halle EJ en μ.

A) 7 B) 8 C) 9

D) 10 E) 11

PROBLEMA Nº 79

Halle el radio en μ de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados miden 15μ, 15μ y 24μ.

A) 10,5 B) 11 C) 12,5

D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 80

Con centro en un punto O de una circunferencia C_1, de radio R se traza una circunferencia C_2 de radio r, (r<R), L es una recta tangente a C_2 en T y secante a C_1, en A y B. Entonces el producto de las proyecciones de OT a los segmentos OA y OB es:

A) $\frac{R^4}{r^2}$ B) $\frac{r^4}{R^2}$ C) $\frac{r^3}{2R}$

D) $\frac{rR}{2}$ E) R^2-r^2

PROBLEMA Nº 81

En un paralelogramo ABCD se ubica E en $\overline{BC}$ de manera que $\overline{AE}$ sea bisectriz del ángulo BAD. La mediatriz de $\overline{AE}$ intercepta a $\overline{AD}$ en F, $\overline{GH} \perp \overline{BC}$ siendo G punto medio de $\overline{AE}$ y H un punto de $\overline{BE}$.

Si $(AF)(BH)=16u^2$, halle GF en u.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 82

En una semicircunferencia C_1 de diámetro $\overline{AB}$ y centro O se traza con diámetro $\overline{AO}$ otra circunferencia C_2 en su interior. C en un punto de C_1 y W de $\overline{AO}$ tal que BW=8(WO) y $\overline{CW}$ intercepta a C_2 en D. Si BC=20u, halle DO en u.

A) 1 B) 2 C) 2,5

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 83

C es una circunferencia de centro O y radio R y ABC es un triángulo inscrito. Por el punto medio M de $\overline{AB}$ se trazan perpendiculares a los radios $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ que interceptan a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en D y E respectivamente; si ME.MD=4R, halle la distancia

de B a $\overline{ME}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 84

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la altura BH. Si el producto de la hipotenusa por las distancias del punto H a los catetos del triángulo ABC es $27000u^3$, halle BH en u.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

PROBLEMA Nº 85

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AP, se ubica Q en $\overline{AC}$ talque $\overline{AP} \cap \overline{BQ} = \{R\}$. Si RB=BP, PC=b y RQ=a. Calcule BR.

A) a+b B) $\sqrt{ab}$ C) $\frac{a+b}{2}$
D) $\sqrt{2ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 86

En un triángulo ABC, AB=6u, la distancia del ortocentro al vértice C es de 8u. Halle el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en u.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 87

En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, se ubican los puntos T y W en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente tal que $\overline{TW} \perp \overline{AC}$, AH=WC, BH=4TW y AB=8u; Halle BT en u.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA Nº 88

En un cuadrilátero convexo, ABCD, la $m\measuredangle A = 90°$, por B y C se trazan las rectas paralelas a $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ que interceptan a sus diagonales en M y N respectivamente. Si MC=17u y CN=15u, halle MN en u.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 89

En un triángulo ABC recto en B, se traza la ceviana $\overline{CM}$, que intercepta a la bisectriz interior $\overline{AN}$ en W, la prolongación de $\overline{MN}$ intercepta a la bisectriz exterior del vértice B en un punto de la prolongación de $\overline{AC}$. Si $MW=8\sqrt{2}u$, WN=7, halle MN.

A) $7\sqrt{2}$ B) 14 C) 16
D) 17 E) 18

PROBLEMA Nº 90

Sea el triángulo ABC; P, D y Q pertenecen a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ tal que $\overline{PQ} // \overline{BC}$, $PD \cap AQ : \{E\}$ y Q es punto medio de $\overline{AE}$, si AP=9, PB=6 y PD=8. Calcule DE.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 91

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas AD y BE que intersecan en el punto O, por D se traza una paralela a BE que corta a $\overline{AC}$ en F. Si AF=FC, BD=6, CD=9, OD=8. Halle AO.

A) 2,5 B) 3 C) 3,5

D) 4 E) 4,5

PROBLEMA Nº 92

En un cuadrilátero convexo ABCD la recta que contiene a los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ intercepta a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en P y Q respectivamente. Si AB=a y CD=b. Calcule BP/QD.

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a+b}{a}$

D) $\frac{a}{a+b}$ E) $\frac{b}{a+b}$

PROBLEMA Nº 93

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si por 3 puntos equidistantes de una recta, se trazan paralelas, estas determinan sobre otra recta secante segmentos congruentes.

II. Si una recta biseca a un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, biseca también al tercer lado.

III. Tres o más rectas paralelas determinan en dos rectas secantes cualquiera, segmentos proporcionales.

A) FVF B) VVF

C) VVV D) FFF

E) FFV

PROBLEMA Nº 94

En un triángulo ABC se tiene que BC=2AB. Las bisectrices interiores de los ángulos A y C interceptan a la mediana $\overline{BM}$ en los puntos P y Q, tal que $\overline{BP}$ es menor que $\overline{BQ}$. Si BP=3u y QM=2u, entonces PQ es:

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 95

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ tal que: $\frac{AM}{NC}=\frac{3}{10}$, $\frac{AM}{MN}=\frac{3}{2}$ y $m\measuredangle ABM = m\measuredangle MBN = m\measuredangle NBC$.

Calcule $m\measuredangle MBN$.

A) 22°33' B) 30° C) 40°

D) 45° E) 53°

PROBLEMA Nº 96

En un triángulo ABC, AB=c, BC=a, el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado AC. Halle la longitud de $\overline{AC}$.

A) $\frac{ac}{a+c}$ B) $\sqrt{ac}$ C) $\sqrt{2ac}$

D) $\frac{a+c}{2}$ E) $\sqrt{a^2+c^2}$

PROBLEMA Nº 97

El perímetro de un triángulo ABC es 25u, la bisectriz interior $\overline{AD}$ mide 10u si: BC=5u. Calcule la distancia del incentro al vértice A.

A) 5u B) 6u C) 7u

D) 8u E) 9u

PROBLEMA Nº 98

Por el incentro de un triángulo ABC, se trazan paralelas IM y IN a los lados AB y BC respectivamente, donde M y N son puntos del lado AC. Si: AB=5, BC=7 y AC=6. Halle MN.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 99

En un triángulo ABC, una recta exterior interseca a las prolongaciones de $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en P, Q y R respectivamente. PA=2AB, 2QC=BC, siendo AC=b, halle: CR.

A) b/3 B) b/2 C) b
D) 2b E) 3b

PROBLEMA Nº 100

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ intersecándose en I; si $\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}$ y BI=2dm, entonces IE en dm es:

A) 2,0 B) 2,5 C) 3,0
D) 3,5 E) 4,0

PROBLEMA Nº 101

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz $\overline{CP}$ y la mediana $\overline{AQ}$, la prolongación de $\overline{PQ}$ interseca a la prolongación de $\overline{AC}$ en **R** siendo: BC=a, AC=b. Halle CR.

A) $\frac{ab}{a-b}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{2ab}{a+b}$
D) $\frac{ab}{b-a}$ E) $\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 102

En una recta L se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se trazan las semicircunferencias C_1 y C_2 en un mismo semiplano, L_2 es recta tangente a C_1 y C_2 en T y S respectivamente, las prolongaciones de $\overline{TB}$ y $\overline{SC}$ se interceptan en el punto Q, en $\overline{TS}$ se ubica E de manera que m∢TBE = 90°, TB=8u, TE=4 ES. Halle BQ en u.

A) 1,5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 103

Sea una circunferencia de centro I, inscrita en un triángulo ABC, AB=13cm, BC=14cm y AC=15cm. P∈$\overline{BC}$ y es punto de tangencia; Q∈$\overline{BC}$ tal que $\overline{AQ}$ es bisectriz del ángulo A. Calcule PQ.

A) 1/6 B) 1/5 C) 1/4
D) 1/3 E) 1/2

PROBLEMA Nº 104

Sea el trapezoide asimétrico ABCD, M y N son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; E y F pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tal que E, M, N y F son colineales. BE=3, AE=9 y FD=4. Halle FC.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 105

En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$, en los triángulos ABM y BMC se trazan las bisectrices $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ (D y E están

en $\overline{BM}$). Si BD=3, EM=2 y $\frac{AB+BC}{AC}=\frac{3}{2}$. Halle DE.

A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3
D) 1/2 E) 1

PROBLEMA Nº 106

En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz $\overline{CP}$ y la mediana $\overline{AQ}$, $\overline{CP}\cap\overline{AQ}=\{O\}$, $\overleftrightarrow{BO}\cap\overline{AC}=\{R\}$, siendo: BC=a, AC=b. Halle CR.

A) $\frac{ab}{a-b}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{2ab}{a+b}$
D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 107

En un cuadrilátero ABCD, $\overrightarrow{AB}\cap\overrightarrow{DC}=\{P\}$, $\overrightarrow{BC}\cap\overline{AD}=\{Q\}$, $\overline{AC}\cap\overline{BD}=\{O\}$, $\overrightarrow{PO}\cap\overline{AD}=\{F\}$, AF=a, FD=b. Halle DQ.

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$
C) $\frac{(a+b)b}{a-b}$ D) $\frac{(a+b)a}{a-b}$
E) a+b

PROBLEMA Nº 108

En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y se ubica D en $\overline{AM}$, la distancia de D a $\overline{AB}$ mide 3 dm, si AB=9 dm y AC=12 dm, entonces la distancia de D al lado $\overline{AC}$ mide (en dm)

A) 5/6 B) 3/2 C) 7/4
D) 2 E) 9/4

PROBLEMA Nº 109

En un triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ intercepta a $\overline{BC}$ en P y a la prolongación de $\overline{AB}$ en Q. Si OP×OQ=36m^2. Halle el radio si O es el circuncentro.

A) 3 m B) 4m C) 5m
D) 6 m E) 7m

PROBLEMA Nº 110

En un paralelogramo ABCD se ubican E, F y H en las prolongaciones de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que: m∢AEH = m∢AFH = 90°, si AB=a, BC=b y HF=c, entonces HE es:

A) $\frac{bc}{a}$ B) $\frac{ab}{c}$ C) $\frac{ac}{b}$
D) $\frac{a}{bc}$ E) $\frac{b}{ac}$

PROBLEMA Nº 111

En un triángulo rectángulo ABC(recto en B) se trazan la altura $\overline{BH}$, $\overline{HD}/\!/\overline{CB}$ (D en $\overline{AB}$), $\overline{HE}/\!/\overline{AB}$ (E en $\overline{BC}$), $\overline{DF}/\!/\overline{BH}$ (F en $\overline{AH}$), $\overline{EM}/\!/\overline{BH}$ (M en $\overline{HC}$), $\overline{MN}/\!/\overline{CE}$ (N en $\overline{HE}$) y $\overline{NQ}/\!/\overline{BH}$ (Q en $\overline{HM}$), si DF=a y EM=b, entonces NQ es:

A) $\sqrt{b^2-a^2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\frac{ab}{a+b}$
D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 112

Sea el paralelogramo ABCD, P es un punto cualquiera de la diagonal $\overline{AC}$. E, H, F

y G son puntos de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$; E, P y F son colineales, y H, P y G también son colineales. Demostrar que: los triángulos: PHF y PEG son semejantes.

PROBLEMA Nº 113

Sea P un punto de una circunferencia de radio R, con centro en P se traza una circunferencia de radio r(r<R). En la primera circunferencia se traza una cuerda AB tangente a la segunda. Halle: PA.PB.

A) $\frac{Rr}{2}$ B) Rr C) 2Rr

D) 3Rr E) 4Rr

PROBLEMA Nº 114

Sea el trapecio PQTE, QT=b, PE=B, $\overline{PT} \cap \overline{QE} = \{F\}$, $M \in \overline{PQ}$ y $N \in \overline{TE}$ tal que M, F y N son colineales. Demuestre que:

A) MF=FN B) $MN = \frac{2B \times b}{B+b}$

PROBLEMA Nº 115

Se tiene dos semicircunferencias tangentes exteriormente de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ colineales, luego se traza la tangente común exterior MN, M enla primera semicircunferencia y N en la segunda. Si: $AM \cap CN = \{D\}$, AB=2a y BC=2b, entonces la distancia de D a $\overline{MN}$ es:

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\frac{3ab}{a+b}$

D) $\frac{ab}{2(a+b)}$ E) $\frac{a+b}{ab}$

PROBLEMA Nº 116

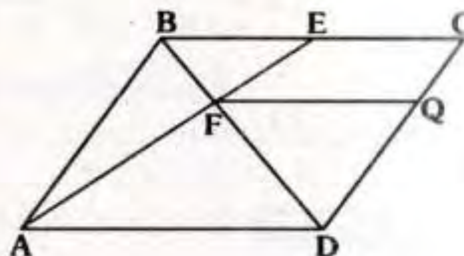
Halle la distancia de un punto de una circunferencia hacia una cuerda, sí se sabe que las distancias de dicho punto hacia las rectas tangentes trazadas por los extremos de dicha cuerda, son de 16 y 25.

A) 12 B) 14 C) 16

D) 18 E) 20

PROBLEMA Nº 117

En la figura, ABCD es un paralelogramo $\overline{FQ} // \overline{AD}$, BE=a, EC=b. Calcule FQ.



A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$

C) $\sqrt{ab}$ D) $\frac{(a+b)2}{2a+b}$

E) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

PROBLEMA Nº 118

Se tiene un triángulo escaleno ABC inscrito en una circunferencia, tal que la recta que contiene a la bisectriz exterior de B intercepta en F a la prolongación de AC y en M a la circunferencia circunscrita, BC=3m, BF=9m, BM=4m. Halle AB.

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 119

Un cuadrilátero ABCD esta inscrito en una circunferencia de diámetro AD. Se trazan las perpendiculares BM y CN hacia el diámetro AD, de modo que AM=4, MN=7 y ND=9. Halle la distancia desde D hacia la recta BC.

A) 8 B) 9 C) 10

D) 11 E) 12.

PROBLEMA Nº 120

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se trazan las rectas tangentes PE y QF a la circunferencia inscrita donde P pertenece a AB, Q pertenece a BC y; E y F pertenecen a AC: Si $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ $\overline{PE} // \overline{QF}$, AE=8, CF=9. Halle el inradio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

A) 6 B) 6,5 C) 8

D) 8,5 E) 9

PROBLEMA Nº 121

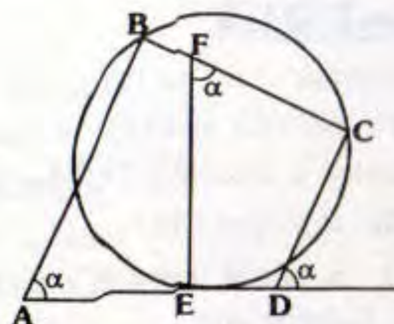
Dos circunferencias son tangentes interiormente en el punto F. En la circunferencia mayor se traza la cuerda AB que es tangente a la otra circunferencia en el punto E. La prolongación del segmento FE intercepta a la circunferencia en el punto H. Si FE=4, EH=5. Halle AH.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 122

En la figura, E es punto de tangencia, AB=e, CD=f. Calcule EF.



A) $\frac{e+f}{2}$ B) $\frac{2ef}{e+f}$ C) $\sqrt{ef}$

D) $\sqrt{\frac{ef}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{ef}{e+f}}$

PROBLEMA Nº 123

En un figura I es el incentro del triángulo ABC, M es punto de tangencia. Si: AM=k, calcule FC.

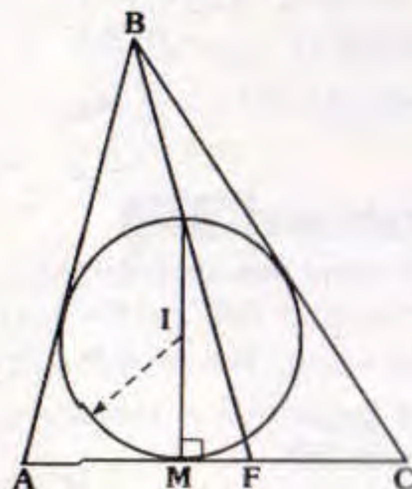
A) $\frac{k}{2}$

B) k

C) $\frac{3k}{2}$

D) $\frac{5k}{2}$

E) 3k



PROBLEMA Nº 124

En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura BH, luego se ubican los puntos medios, M de $\overline{BC}$ y N de $\overline{BH}$ tal que AM=2AN. Halle la m∢C.

A) 15° B) $\frac{53°}{2}$ C) $\frac{37°}{2}$

D) 30° E) $\frac{45°}{2}$

PROBLEMA Nº 125

En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{CM}$ y $\overline{AH}$; en $\overline{AC}$ se ubica el punto E y en el exterior y relativo a $\overline{AC}$ se ubica el punto D tal que ED=EC $T \in \overline{MD}$, $\overline{ET} \perp \overline{MD}$, $m\measuredangle ACB = m\measuredangle MDE$, MT=TD, si TE=5. Calcule AH.

A) 5 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

PROBLEMA Nº 126

En un paralelogramo ABCD se traza una recta que pasa por el vértice D se intercepta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AB}$ en los puntos R, Q y P respectivamente. Si QR=3u, RD=4u. Halle PQ(en u)

A) 1/3 B) 2/3 C) 4/3
D) 5/3 E) 7/3

PROBLEMA Nº 127

Se tiene una circunferencia inscrita en un triángulo ABC, AB=9cm, BC=7cm y AC=8cm, $M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{BC}$ tal que $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia $\overline{MN} // \overline{AC}$. Halle MN.

A) 1/3 B) 2/3 C) 4/3
D) 5/3 E) 8/3

PROBLEMA Nº 128

En un paralelogramo ABCD, AB=9u, AD=12u, se ubica el punto P en $\overline{AC}$, sobre su diagonal de manera que la distancia de P a $\overline{AB}$ es 6u, calcule la distancia de P al lado $\overline{AD}$.

A) 1,5 B) 2,5 C) 3,5
D) 4,5 E) 5,5

PROBLEMA Nº 129

En una circunferencia de centro A y radio R, se ubica un punto B. Luego con centro en B se traza una circunferencia secante a la primera circunferencia. Una cuerda EF de la primera circunferencia al prolongarse es tangente en Q a la otra circunferencia. Si: (BE)(BF)=K, calcule el radio de la circunferencia de centro B.

A) $\frac{K}{4R}$ B) $\frac{K}{2R}$ C) $\frac{K}{R}$
D) $\frac{2K}{R}$ E) $\frac{4K}{R}$

PROBLEMA Nº 130

Se tiene el triángulo ABC, AB=9, BC=4, AC=6; en la prolongación de $\overline{CB}$ se ubica un punto E; en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica un punto D; las prolongaciones de $\overline{ED}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en Q; BD=6 y BE=8, halle CQ.

A) $\frac{32}{9}$ B) 2 C) 3
D) 9 E) 11

PROBLEMA Nº 131

Se tiene el triángulo ABC, AB=c, BC=a, AC=b. Por el incentro I se traza $\overline{IQ}$ paralela al lado $\overline{AB}$, que interseca al lado $\overline{AC}$ en Q. Calcule QC.

A) $\frac{(a+b)a}{a+b+c}$ B) $\frac{(a+b)b}{a+b+c}$

C) $\dfrac{(a+c)c}{a+b+c}$ D) $\dfrac{b(b+c)}{a+b+c}$

E) $\dfrac{c(a+b)}{a+b+c}$

PROBLEMA Nº 132

Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O se trazan las tangentes PA y PB, y además una recta PQ exterior a la circunferencia. Se traza $\overline{OF}$ perpendicular a $PQ(F \in PQ)$ que interseca a $\overline{BA}$ en E; OE=a y EF=b, calcule el radio de la circunferencia.

A) $\sqrt{a(a+b)}$ B) $\dfrac{ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{b(a+b)}$ E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 133

En un paralelogramo ABCD, por el vértice A se traza una recta que intersecta a la prolongación del lado $\overline{DC}$ en el punto N. La altura $\overline{DH}$ $(H \in \overline{AB})$ del paralelogramo intersecta a $\overline{AN}$ en el punto M. Si $m\measuredangle DAN = 2m\measuredangle BAN$ y BC=18u, entonces la longitud (en u) de $\overline{MN}$ es:

A) 18 B) 27 C) 36

D) 48 E) 56

PROBLEMA Nº 134

En un cuadrado ABCD cuyo centro es O, se ubican en el lado $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ los puntos P y Q respectivamente de manera que la prolongación de $\overline{PO}$ es perpendicular a $\overline{AQ}$. Si CQ=4u. Calcule BP(en u)

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 135

En la figura mostrada, BC=6 y $PQ \cdot AC=10$. Halle PC.

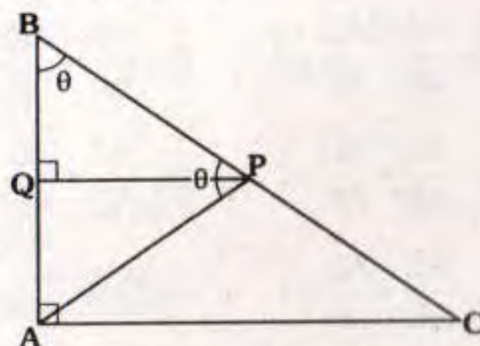
A) $2\sqrt{2}$

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



PROBLEMA Nº 136

Un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BD}$ $(D \in \overline{AC})$. En $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ se ubican los puntos E, F y G tal que $\overline{EP} // \overline{AB}$, $\overline{FG} // \overline{BC}$. Si AE=m, ED=n y DG=q, entonces la longitud de $\overline{GC}$ es:

A) $\dfrac{nm}{q+n}$ B) $\dfrac{mq}{m+n}$ C) $\dfrac{mn}{q}$

D) $\dfrac{mq}{n}$ E) $\dfrac{nq}{m}$

PROBLEMA Nº 137

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos triángulos equiláteros son semejantes.

II. Dos triángulos rectángulos isósceles, son semejantes.

III. Dos polígonos regulares son semejantes.

A) VVV B) VVF C) FFV

D) FFF E) VFF

PROBLEMA Nº 138

En un paralelogramo ABCD, por el vértice C se traza una recta que intercepta a las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ en E y F respectivamente. Entonces ¿Cuál de las siguientes relaciones es la correcta?

A) $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=1$ B) $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=1$

C) $\frac{AE}{AB}+\frac{AD}{AF}=1$ D) $\frac{AF}{AD}+\frac{AB}{AE}=1$

E) $\frac{AE}{AD}+\frac{AB}{AF}=1$

PROBLEMA Nº 139

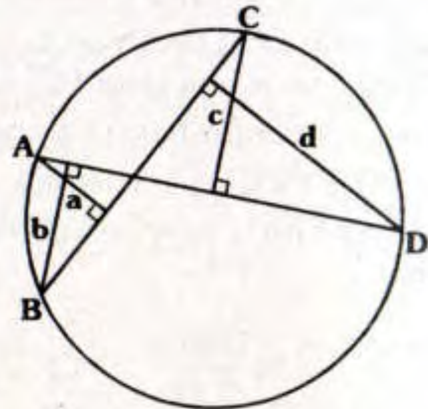
C es un punto de $\overline{AB}$, tal que $\overline{AC}$ es media proporcional de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$. Si $\frac{1}{AC}+\frac{1}{CB}=(2+\sqrt{5})$, entonces la longitud de $\overline{AB}$ es:

A) 1/4 B) 1/3 C) 1/2

D) 1 E) 3/2

PROBLEMA Nº 140

En la figura mostrada, hallar la relación existente entre a, b, c y d.



A) ab=cd B) ac=bd

C) ad=bc D) a+b=c+d

E) $a^2+b^2=c^2+d^2$



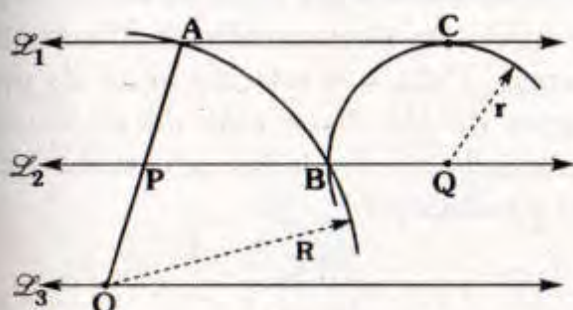


Problemas Propuestos

ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 141

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, AP=15, R=40, r=12 y $m\widehat{BC} = 90°$. Calcule $m\widehat{AB}$.

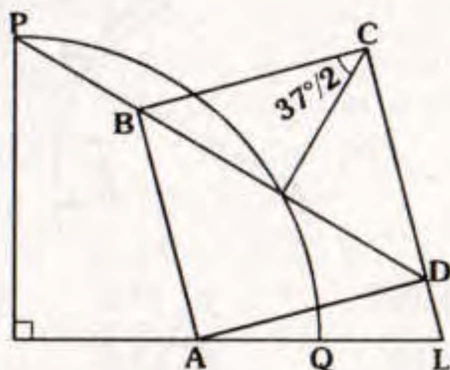


A) 37° B) 14° C) 30°
D) 23° E) 7°

PROBLEMA Nº 142

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Calcule AQ/QL.

A) 1/2
B) 1/3
C) 1/4
D) 2/3
E) 3/4



PROBLEMA Nº 143

En el lado CD del trapezoide ABCD se ubican M y N ($M \in \overline{CN}$) tal que $\overline{BM} // \overline{AD}$, $\overline{AN} // \overline{BC}$, $\overline{MB} \cap \overline{AC} = \{P\}$, $\overline{AN} \cap \overline{BD} = \{Q\}$ y las diagonales se cortan en O. Si AO=5, OP=1, PC=3 y ND=5. Calcule CN.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

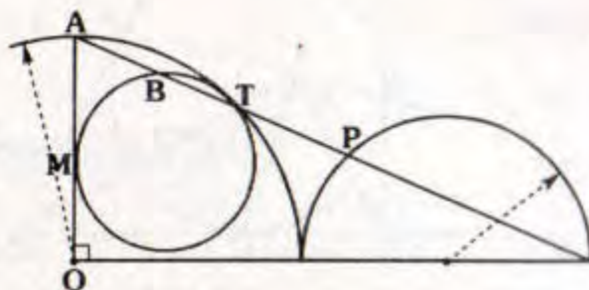
PROBLEMA Nº 144

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M, N y P respectivamente, tal que AP=PM y NP=PC. Si $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en Q y $\frac{AQ}{3} = \frac{QN}{7} = \frac{MQ}{2}$. Calcule $\frac{AP}{PC}$.

A) 2/7 B) 3/7 C) 1/4
D) 3/8 E) 1/2

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, M, T y Q son puntos de tangencia y AM=MO. Calcule TP/AB.



A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{4\sqrt{5}}{7}$

PROBLEMA Nº 146

En el gráfico, AB=18. Calcule BM.

A) 9 B) 4,5 C) 5,5

D) 2,4 E) 5,75

PROBLEMA Nº 147

En el triángulo ABC: AB=8, BC=10 y AC=12. Calcule la medida del segmento paralelo al $\overline{AC}$ que contiene al incentro y cuyos extremos se ubican en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

A) 3 B) 4,2 C) 6

D) 7,2 E) 9

PROBLEMA Nº 148

Según el diagrama, calcule x. C, E, F: puntos de tangencia.

A) 15°

B) 20°

C) 25°

D) 30°

E) 37°

PROBLEMA Nº 149

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AF y centro O. Por A se levanta el $\overline{AB}$ perpendicular al $\overline{AF}$. Luego se traza el segmento tangente BD. La prolongación del $\overline{DO}$ corta a la prolongación del $\overline{BA}$ en E. En la prolongación del $\overline{ED}$ se toma C, tal que $m\widehat{FD} = 2(m\sphericalangle BCD)$, OD=1 y EO=3. Calcule CD.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 150

Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia. Calcule la relación entre los productos de las distancias de un punto aferente hacia dos lados opuestos de dicho cuadrilátero.

A) 1 B) 0,5 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) F.D

PROBLEMA Nº 151

Si AM=7, MN=1 y "A" es punto de tangencia, calcule R.

A) 10,5 B) 11,5 C) $5\sqrt{2}$

D) 12 E) 12,5

PROBLEMA Nº 152

Si "E" es el excentro relativo a $\overline{AC}$ del triángulo ABC, AB=3 y AD=4, calcule AE.

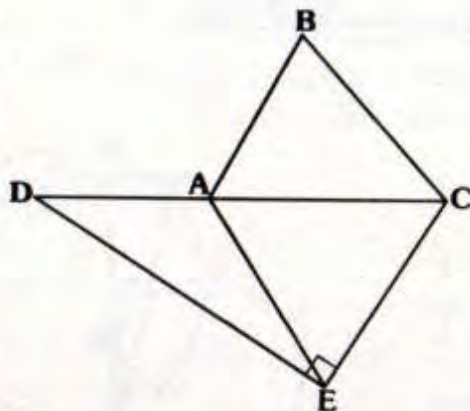
A) $3\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{3}$

C) 5

D) 7

E) $2\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 153

Calcule CD, si AB=a y BD=b.

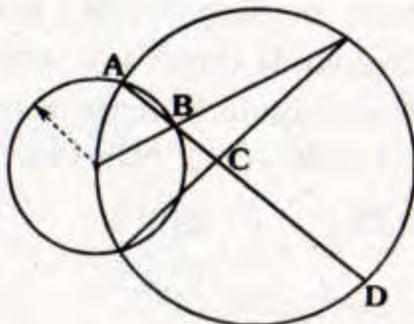
A) $\frac{b^2}{a+b}$

B) $\frac{a^2}{a+b}$

C) $\frac{ab}{b-a}$

D) $\frac{2ab}{a+b}$

E) $\frac{a+b}{2}$



PROBLEMA Nº 154

Se tiene un cuadrado ABCD de centro "O"; por dicho punto se traza una recta que interseca a la prolongación de $\overline{CB}$ en "P" tal que 7(PB)=2(BC); luego se traza $\overline{AH} \perp \overline{PO}$ ($H \in \overline{PO}$). Calcule AH, si HO=4.

A) 8 B) 24 C) 4

D) 18 E) $9\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 155

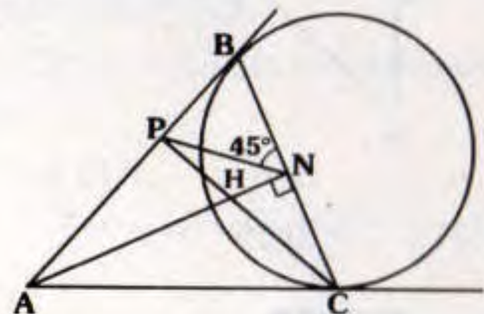
Se tiene un triángulo ABC de incentro I, una recta que contiene al punto I interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente, tal que BM=BN, AM=4 y NC=9. Calcule MN.

A) 13 B) 6 C) 15

D) 12 E) 10

PROBLEMA Nº 156

Si AP=3(PB) y BC=14, calcule HN. (B y C son puntos de tangencia).



A) 3 B) 4 C) 3,5

D) 7 E) 5

PROBLEMA Nº 157

En un triángulo ABC de incentro I y excentro E relativo al $\overline{BC}$, se cumple que AB+AC=3(BC) y el $\overline{AE}$ interseca al $\overline{BC}$ en M. Calcule ME, si MI=1.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

PROBLEMA Nº 158

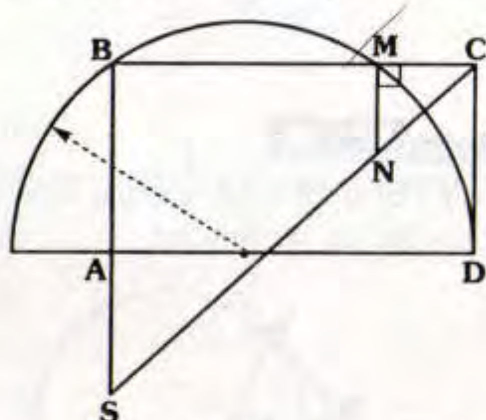
En la prolongación del lado AC y en el lado AB de un triángulo ABC se ubican respectivamente Q y P, tal que $\overline{PQ} \cap \overline{BC} = \{R\}$, calcule CQ, si: AP=3(PB), 2(PR)=3(RQ) y AQ=28.

A) 2 B) 1 C) 3

D) 4 E) 7

PROBLEMA Nº 159

En la figura ABCD es un rectángulo, AD=2(CD) y NC=2. Calcular SN.



A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 15

PROBLEMA Nº 160

Se tiene un triángulo ABC ($m\sphericalangle B = 90°$). Una semicircunferencia tiene su centro en el $\overline{AC}$, pasa por A y es tangente al $\overline{BC}$ en Q. En la prolongación de $\overline{AQ}$ se ubica P, de modo que $m\sphericalangle APB + m\sphericalangle BPC = 180°$, PC=7(PQ) y AB=2. Calcule AC.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 14

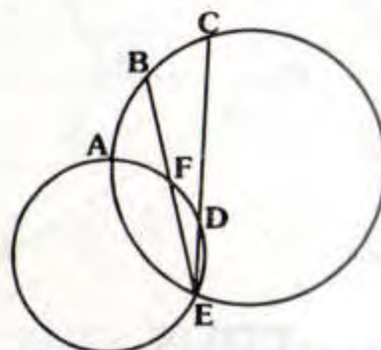
PROBLEMA Nº 161

El diámetro $\overline{AB}$ de una semicircunferencia se prolonga hasta el punto C y luego se traza la tangente $\overline{CT}$. En la circunferencia se traza la cuerda $\overline{BP}$ paralela a la tangente $\overline{CT}$, tal que AP=2. Si BC=6. Calcule la medida del radio de la semicircunferencia.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 162

Según el diagrama AC=8, BF=3 y CD=4, calcule AB.



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

PROBLEMA Nº 163

Se tiene un triángulo ABC; la circunferencia inscrita de centro I es tangente a $\overline{BC}$ en P se traza la bisectriz interior $\overline{AQ}$. Si AB=13; BC=14 y AC=15, calcule PQ.

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75
D) 1 E) 1,25

PROBLEMA Nº 164

Interiormente a un triángulo ABC se traza la semicircunferencia de diámetro BC, la cual corta a la altura AH de dicho triángulo en P. La mediana BM corta al $\overline{AH}$ en Q. Calcule QH, si: AQ=15 y $m\widehat{PB} = 53°$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 165

En un triángulo ABC de baricentro "G" se traza una recta por G que intersecta a $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ en K y L y a la prolongación de $\overline{CA}$ en P. Si: $\frac{1}{GL}+\frac{1}{GP}=0,25$; calcule GK.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 0,5

PROBLEMA Nº 166

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BR}$ (R en $\overline{AC}$) luego se traza la ceviana $\overline{AM}$ que interseca a $\overline{BR}$ en su punto medio. Si BM=2 y CM=5, calcule AB.

A) $\frac{20}{7}$ B) $\frac{10}{7}$ C) 4

D) 3 E) $\frac{14}{3}$

PROBLEMA Nº 167

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{BE}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AF}$ (E en $\overline{AC}$; D en $\overline{AB}$; F en $\overline{BC}$). Las mediatrices de $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{AF}$ intersectan a las prolongaciones de $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ en los puntos. H, G y F respectivamente. Si GH=a y HF=b, calcule GF.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $2\sqrt{a^2+b^2}$

C) a+b D) $\sqrt{a^2+b^2+2ab}$

E) $\sqrt{a^2+b^2-2ab}$

PROBLEMA Nº 168

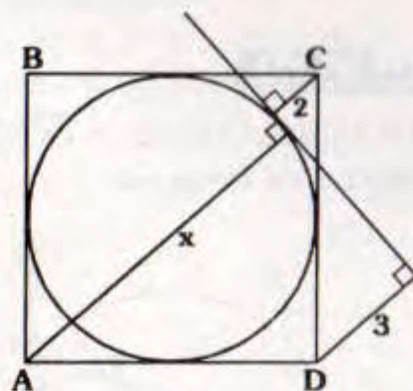
Se tiene un cuadrilátero inscrito ABCD, de manera que las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se cortan en "F" y las prolongaciones de $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ en "E", la bisectriz del ángulo BFA intersecta a $\overline{AB}$ en "I" la bisectriz del ángulo DEA intersecta a $\overline{AD}$ en "H", si m∢CAD = 20°, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{BC}$ y $\overline{HI}$.

A) 10° B) 15° C) 20°

D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 169

En la figura, ABCD es un cuadrado. Calcule x.



A) 14 B) 10 C) 16

D) 15 E) 11

PROBLEMA Nº 170

En la figura, M y N: puntos de tangencia, AM=4; IC=10; NC=8. Calcule AI.

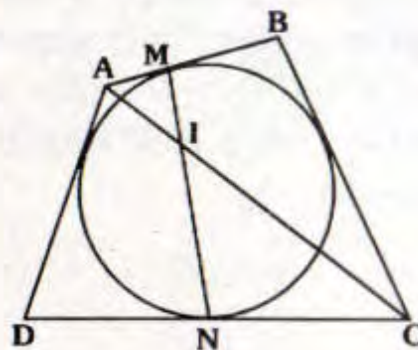
A) 4

B) 5

C) 3

D) 7

E) 8



PROBLEMA Nº 171

En la figura, ABCD es un trapecio isósceles, PQ=2 y QR=1. Calcule RS.

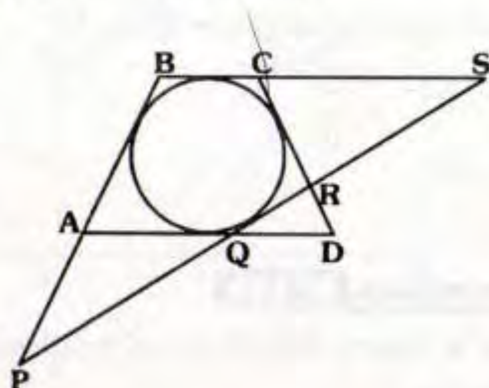
A) 2

B) 1

C) 3

D) 3,5

E) 4



PROBLEMA Nº 172

Del gráfico, calcule CH/HQ, si $\overline{OQ}//\overline{BC}$, T y B son puntos de tangencia.

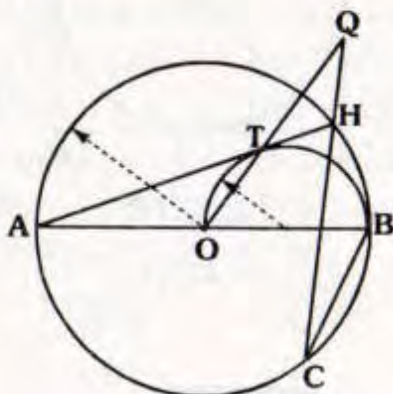
A) 3/2

B) 2

C) 4/3

D) 5/4

E) 7/3



PROBLEMA Nº 173

En un cuadrado ABCD, en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que la m∢PCQ = 45°, $\overline{CQ} \cap \overline{BD} = \{M\}$, $\overline{PM} \cap \overline{CA} = \{N\}$ y $(CM)^2 = 10(CN)$. Calcule AB.

A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$

D) 10 E) $10\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 174

En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, en el arco AB se ubica el punto P, las prolongaciones de $\overline{BP}$ y $\overline{CA}$ se intersecan en Q. Si AB=BC, BP=4 y PQ=12, calcule BC.

A) 10 B) 8 C) $4\sqrt{2}$

D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº 175

Se tiene un triángulo ABC: m∢ACB = 75°, se traza la altura $\overline{BH}$ y $\overline{HP}$ perpendicular a $\overline{BC}$ ($P \in \overline{BC}$), luego se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{AB}$ ($Q \in \overline{BA}$). si $\overline{PQ} \cap \overline{BH} = \{L\}$ y PL=6, calcule AB.

A) 36 B) 18 C) 20

D) 24 E) 28

PROBLEMA Nº 176

Se tiene un hexágono regular ABCDEF, en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto R de modo que $\overline{AR}$ interseca a $\overline{FC}$ y $\overline{CD}$ en N y M respectivamente. Si AN=3 y NM=1, calcule MR.

A) 4 B) 3 C) 2,5

D) 2 E) 6

PROBLEMA Nº 177

En un triángulo ABC, en $\overline{BC}$ y en su interior se ubican los puntos Q y P respectivamente, de modo que APQC es un trapecio isósceles, m∢BCA = 60° y m∢ABP = m∢PBQ. Si AB=3(QC) y BQ=6, calcule PQ.

A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 178

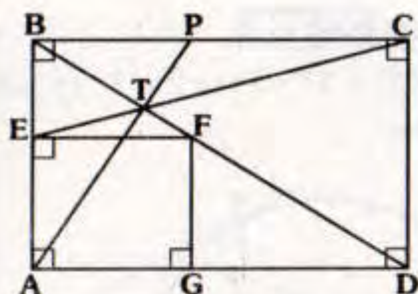
En el triángulo ABC se ubica en $\overline{AC}$ el punto D y se traza $\overline{DH} // \overline{AB}$ (H en $\overline{BC}$) tal que $m\measuredangle BDC = m\measuredangle BHD$. Si AB=12, BH=4 y DC=10, calcule BD.

A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 9

D) 6 E) $6\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 179

Según el gráfico 5(BP)=3(PC), si GD=15, calcule AG.

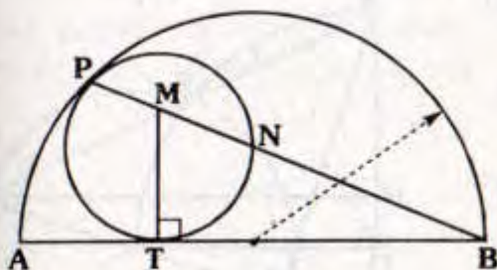


A) 6 B) 18 C) 7,5

D) 12 E) 9

PROBLEMA Nº 180

Del gráfico, $\overline{AB}$ es diámetro, P y T son puntos de tangencia. Calcule MN, si NB=6 y $m\widehat{NP} = 120°$.



A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4

D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº 181

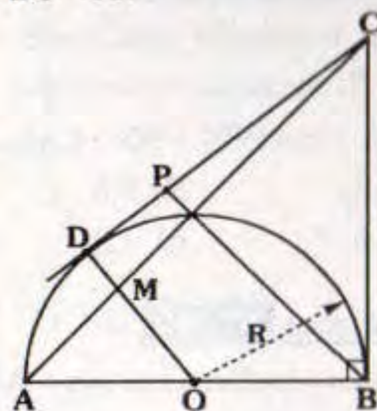
Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC, se toman respectivamente los puntos P y Q y R, S y H en $\overline{AC}$ de modo que PQRS es un cuadrado. La prolongación del $\overline{AQ}$ corta a la paralela trazada por B al $\overline{AC}$ en M. Calcule la $m\measuredangle AMH$, si PS=3(AS) y $\overline{BH} \perp \overline{AC}$.

A) 8° B) 15° C) 23°

D) 18,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 182

Calcule R, si D es punto de tangencia, BP=3(AM) y BC=18.



A) 6

B) 12

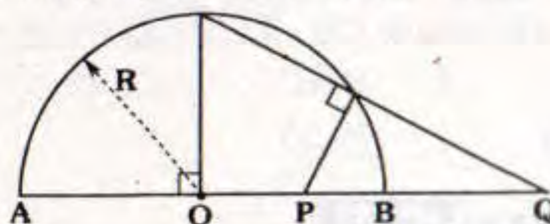
C) 8

D) 4

E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 183

En la figura, OP=BQ=x, calcule x.



A) $\frac{R}{2}$ B) $\frac{R}{2}\sqrt{3}$

C) $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$ D) $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

E) $\frac{R}{2}(\sqrt{7}-1)$

PROBLEMA Nº 184

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule x.

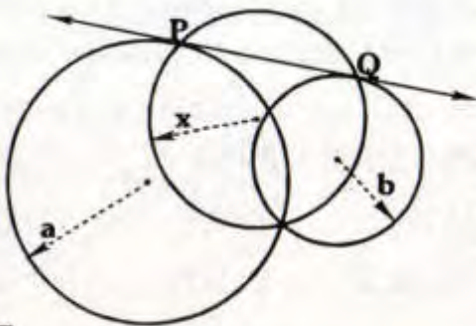
A) $\frac{a+b}{2}$

B) $\sqrt{ab}$

C) $2\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{2ab}$

E) $\sqrt{a^2+b^2}$



PROBLEMA Nº 185

En el triángulo ABC: AB=4, BC=6 y AC=8; se traza la ceviana $\overline{BD}$ tal que $m\sphericalangle A + m\sphericalangle PBC = 90°$. Calcule AP.

A) 7,2 B) 2,8 C) 3,2
D) 3,6 E) 4,2

PROBLEMA Nº 186

En el cuadrilátero convexo ABCD se traza una recta que interseca a la prolongación de $\overline{DA}$ en M, a $\overline{AB}$ en N, a la prolongación de $\overline{BC}$ en Q y a $\overline{CD}$ en P. Si AD=3MA, 3AN=2NB, PD=5CP y BC=14, calcule CQ.

A) 6 B) 8 C) 12
D) 15 E) 16

PROBLEMA Nº 187

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, AB=5 y BC=12, se traza la bisectriz interior $\overline{CN}$ y luego $\overline{NH}$ (H ∈ $\overline{AC}$); en la prolongación de $\overline{NH}$ se ubica el punto Q, tal que $\overline{QC}//\overline{HI}$ (I es incentro del triángulo ABC). Calcule HQ, si AN=NH.

A) 10 B) 12 C) 13
D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

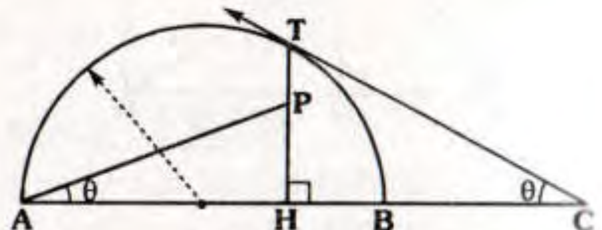
PROBLEMA Nº 188

Se tiene un rectángulo ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, en la prolongación de $\overline{CD}$ se ubica el punto Q tal que la recta NQ interseca a $\overline{AC}$ en P; calcule $m\sphericalangle PMQ$ si la $m\sphericalangle MQC = 20°$.

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 189

Calcule AP, si TP=PH=2 y T es punto de tangencia.



A) 8 B) 5 C) 3
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 190

Si (QH)(AO)=6, calcule AQ.

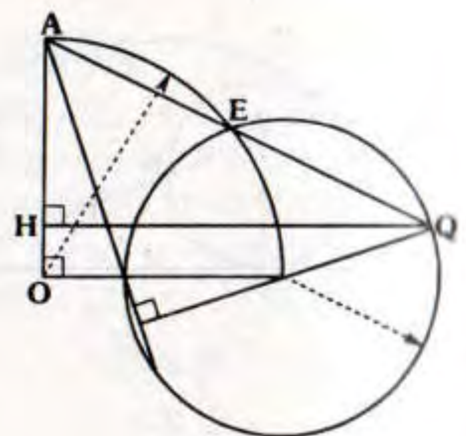
A) $2\sqrt{6}$

B) $\sqrt{5}$

C) $2\sqrt{3}$

D) $\sqrt{6}$

E) 3



PROBLEMA Nº 191

Si AQ=5 y AP=6, calcule $m\overset{\frown}{PB}$.

A) 127°

B) 135°

C) 106°

D) 90°

E) 120°

PROBLEMA Nº 192

Calcule OP, si $\overline{OQ}//\overline{TH}$, los radios miden 2 y 3, además Q, H, T y P son puntos de tangencia.

A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{6}$

C) $5\sqrt{2}$

D) 5

E) 4

PROBLEMA Nº 193

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica E en $\overline{BC}$ y F en la prolongación de $\overline{AD}$ tal que $\overline{EF}$ es tangente a la circunferencia inscrita. Si EC=2 y DF=3. Calcule AB.

A) 4 B) 6 C) 8

D) 12 E) 18

PROBLEMA Nº 194

En el gráfico, AP=2 y RQ=3, calcule $\dfrac{QB}{BR}$.

A) 1

B) 1/2

C) 1/3

D) 2/3

E) 4/3

PROBLEMA Nº 195

En el gráfico, C y E son puntos de tangencia. Además $m\overset{\frown}{AF}=45°$, $OH=2\sqrt{2}$ y $HB=3\sqrt{2}$. Calcule BC.

A) 1 B) 2 C) 4

D) $2\sqrt{2}$ E) 8

PROBLEMA Nº 196

Si BC=a y CD=b. Calcule AB.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a(a+b)}$

C) $\sqrt{b(a+b)}$ D) $\sqrt{2ab}$

E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA Nº 197

En la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se inscribe el cuadrilátero ABCD tal que BC=CD=2 y AD=8. Calcule AB.

A) 6 B) 7 C) 8

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 198

En el hexágono regular ABCDEF se ubica M en $\overline{CE}$, $\overline{CF} \cap \overline{AM} = \{Q\}$, 2(AQ)=3(QM) y CM=6. Calcule EM.

A) 2,5 B) 2,8

C) 3 D) 3,2

E) 3,6

PROBLEMA Nº 199

En el gráfico, S es punto de tangencia. Si PQ=3 y QT=5. Calcule AP.

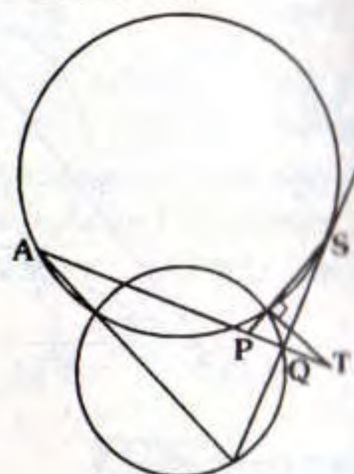
A) 8

B) 4

C) 12

D) $4\sqrt{2}$

E) $4\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 200

En el triángulo ABC, con AB<BC, se traza la bisectriz interior BD y la mediana BM, I es incentro del triángulo ABC, $\overleftrightarrow{AI} \cap \overline{BM} = \{E\}$ y $\overline{EM} \cap \overline{IC} = \{F\}$. Si BE=6 y FM=4. Calcule EF.

A) 2 B) 3 C) 1

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$



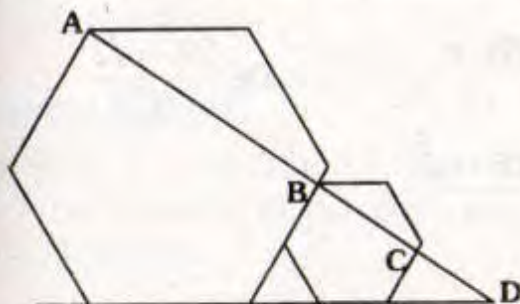


Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, se tienen dos hexágonos regulares, si AB=a y BC=b. Calcule CD.



A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{2ab}{a-b}$

D) $\frac{a-b}{2}$ E) $\frac{b^2}{a-b}$

PROBLEMA Nº 202

En un triángulo ABC se ubica en la región interior P y los puntos M, N y Q en $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $\overline{MP}//\overline{AB}$, $\overline{NP}//\overline{BC}$ y $\overline{PQ}//\overline{AC}$.

Calcule $\frac{AM}{AC}+\frac{BN}{AB}+\frac{CQ}{BC}$.

A) 1 B) 2 C) 3

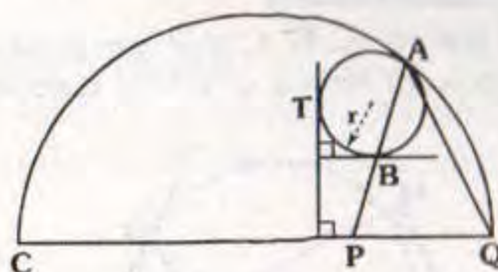
D) 1/2 E) 1/3

PROBLEMA Nº 203

En un triángulo ABC se traza la circunferencia inscrita la cual es tangente a los lados AB, BC y AC en P, Q y T, luego se traza la perpendicular TH a $\overline{PQ}$(H en $\overline{PQ}$). Demostrar $m\measuredangle AHT = m\measuredangle THC$.

PROBLEMA Nº 204

En el gráfico, $\overline{CQ}$ es diámetro de la semicircunferencia, A, B y T son puntos de tangencia; QA=2(AB) y PQ= $4\sqrt{2}$. Calcule **r**.



A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) 4 E) $\sqrt{2}+2$

PROBLEMA Nº 205

Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB (el ángulo APB es obtuso). La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N, respectivamente. La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y. Si $m\widehat{XY}=\alpha$, calcule $m\measuredangle APB$.

A) α B) 2α

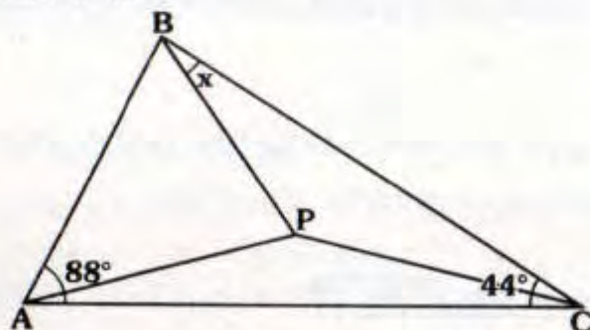
C) $90°-\alpha$ D) $90°+\alpha$

E) $180°-\alpha$

PROBLEMA Nº 206

En el gráfico, AB=BP y AP=PC.

Calcule x.

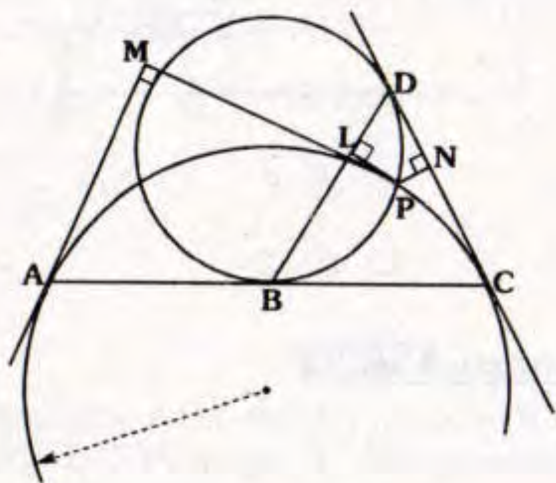


A) 30° B) 16° C) 18°

D) 36° E) 22°

PROBLEMA Nº 207

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si MP=a y NP=b. Calcule LP.



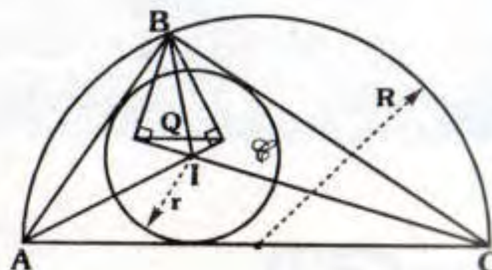
A) $a+b$ B) $\sqrt{ab}$

C) $2\sqrt{ab}$ D) $\sqrt[4]{b^3a}$

E) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

PROBLEMA Nº 208

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Calcule BQ/QI.



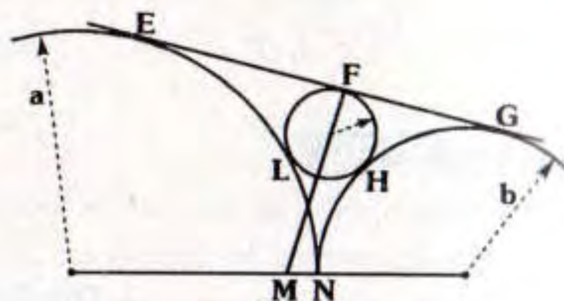
A) $\dfrac{2R}{r}$ B) $\dfrac{2R+r}{r}$

C) $\dfrac{2R-r}{r}$ D) $\dfrac{2R-r\sqrt{2}}{r}$

E) $\dfrac{2R+r\sqrt{2}}{r}$

PROBLEMA Nº 209

En el gráfico, E, F, G, H y L son puntos de tangencia. Calcule MF.



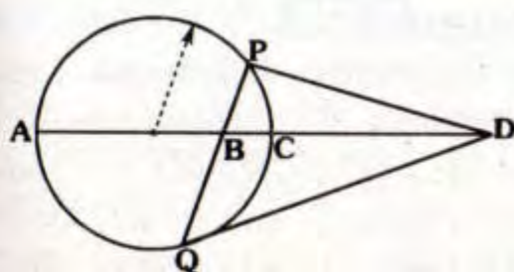
A) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ B) $\sqrt{ab}\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

C) $\sqrt{ab}$ D) $2\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$

E) $\sqrt{a^2-b^2}$

PROBLEMA Nº 210

En el gráfico, A, B, C y D representan una cuaterna armónica. Indique que punto notable es **C** para el triángulo PQD.



A) Baricentro B) Incentro

C) Circuncentro D) Ortocentro

E) Punto simediano

PROBLEMA Nº 211

En el gráfico, cada lado del cuadrilátero no convexo ABCD es trisecado por los puntos indicados.

Calcule: $\frac{WN}{WG}+\frac{PT}{TF}+\frac{TH}{MH}+\frac{TF}{TP}$

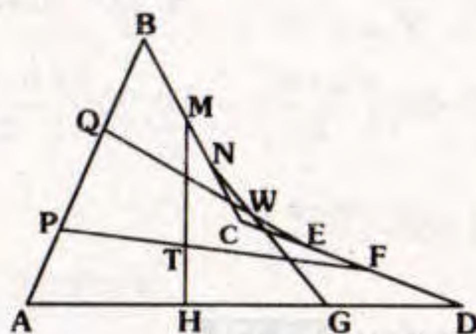
A) 1

B) 2

C) 10/3

D) 7/3

E) 11/3



PROBLEMA Nº 212

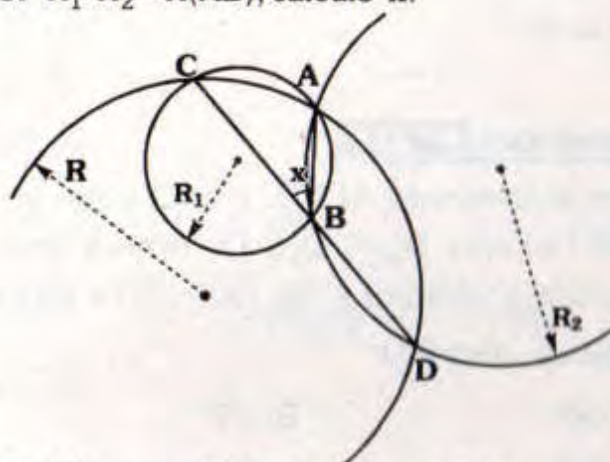
Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, M, L, N y T están sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}=3$, BL=LC y AT=TD. $\overline{MN}\cap\overline{LT}=\{X\}$, calcule $\frac{MX}{XN}+\frac{LX}{XT}$.

A) 2/3 B) 4/3 C) 5/3

D) 2 E) 3

PROBLEMA Nº 213

Si $R_1 \cdot R_2 = R(AB)$, calcule **x**.



A) 45° B) 90° C) 30°

D) 75° E) 60°

PROBLEMA Nº 214

En la figura: I es incentro del triángulo ABC, AB=8 y BC=6. Calcular QR+TS.

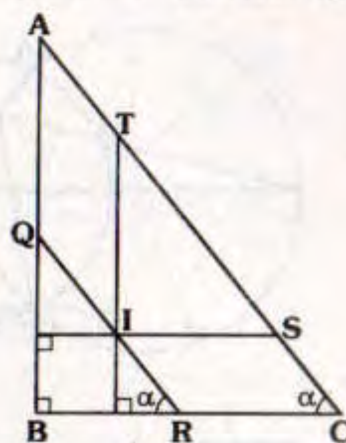
A) 8

B) 9

C) 10

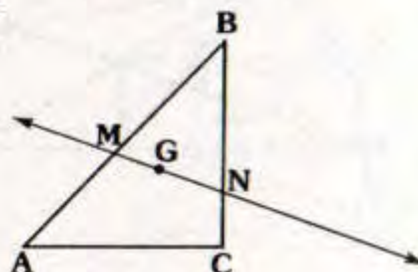
D) 11

E) 12



PROBLEMA Nº 215

En la figura, G es baricentro del triángulo ABC, AM=a, MB=b, BN=c y NC=d, luego:



A) $bc=ac+bd$ B) $ac=bc+bd$

C) $cd=ac+bd$ D) $bd=ab+bc$

E) $ac=bd$

PROBLEMA Nº 216

Sea el cuadrado ABCD, P y Q están en $\overline{AD}$ tal que A, P, Q y D forman una cuaterna armónica. Si $\overline{QC}\cap\overline{BD}=\{M\}$. Calcule m∢MPD

A) 30° B) 37°

C) 53° D) 60°

E) 45°

PROBLEMA Nº 217

En la figura: PA=2 y PQ=4, calcule PB.

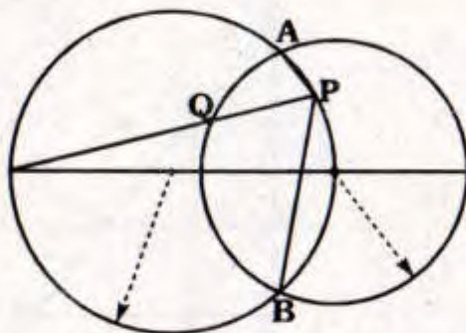
A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 16



PROBLEMA Nº 218

Calcule AL, si: 2(PQ)=3(PL) y QL=2.

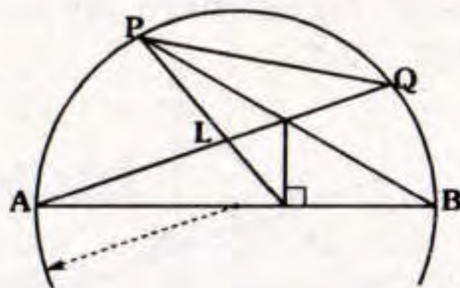
A) $2\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{3}$

E) 4



PROBLEMA Nº 219

En un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia; $\overline{BD}$ biseca en M a $\overline{AC}$. Se trazan $\overline{BH}\perp\overline{AC}$ y $\overline{CN}\perp\overline{BD}$, $\overline{CN}$ prolongado interseca en L a $\overline{AD}$. Si (AH)(AL)=48 y LD=10, calcule HM.

A) 1,2 B) 2,4 C) 3,6

D) 4,8 E) 0,6

PROBLEMA Nº 220

En un triángulo ABC, donde AC=78; $M\in\overline{AB}, Q\in\overline{AC}$ y $R\in\overline{BC}$ ∧ $N\in\overline{BC}$ (RN<RC). Si AM=324, QC=24, NC=144, MP=9 y PN=4, calcule la m∢QRC, si m∢A = α y m∢C = θ ($\overline{MN}\cap\overline{QR}=\{P\}$)

A) $\dfrac{\alpha+\theta}{2}$ B) $90°-(\alpha+\theta)$

C) $45°-\left(\dfrac{\alpha+\theta}{4}\right)$ D) $90°-\left(\dfrac{\alpha-\theta}{2}\right)$

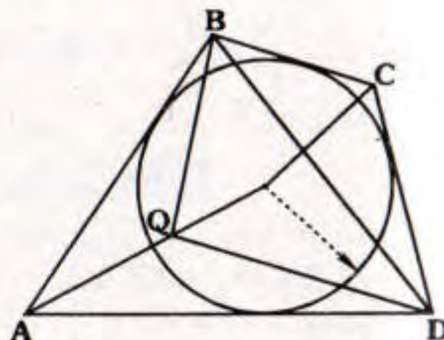
E) $45°-\left(\dfrac{\alpha-\theta}{2}\right)$

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, el cuadrilátero ABCD es circunscrito.

Demostrar que:

m∢ABC = 2(m∢QBD) ⇔ m∢ADC = 2(m∢QDB)



PROBLEMA Nº 222

En un triángulo ABC: AB=14, BC=13 y AC=15. La circunferencia inscrita determina en dichos lados los puntos M, N y T respectivamente. Si $\overline{MN} \cap \overline{BT} = \{P\}$.

Calcule MP/PN.

A) $\frac{56}{47}$ B) $\frac{52}{49}$ C) $\frac{43}{39}$

D) $\frac{51}{46}$ E) $\frac{49}{37}$

PROBLEMA Nº 223

En un triángulo ABC de circuncentro O y ortocentro H, la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca a $\overline{BC}$ en M de modo que el producto de la distancia de O hacia $\overline{AC}$ con $\overline{OM}$ es 24 y HA=4, calcule el circunradio del triángulo ABC.

A) 6 B) 4 C) 24

D) 12 E) 10

PROBLEMA Nº 224

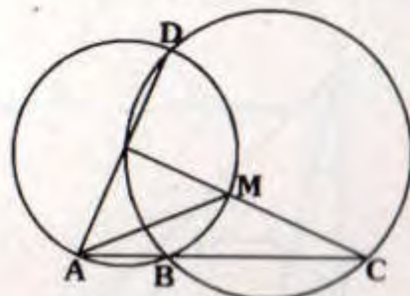
Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes interiores a la circunferencia C_3 en A y B respectivamente en C_3 se traza la cuerda $\overline{DE}$ (E próximo a B) tangente común interior a C_2 y C_1 en G y F respectivamente y $\overline{BG} \cap C_3 = \{T\}$. Si 5(AB)=7(FE), calcule la razón de distancias de T a $\overline{FE}$ y $\overline{AB}$

A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{5}{7}$

D) $\frac{7}{5}$ E) 7

PROBLEMA Nº 225

Según el gráfico; calcule AM, si: AB=2 y BC=6.



A) 2

B) 4

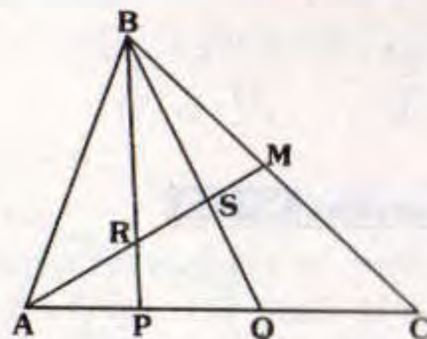
C) 6

D) 8

E) 12

PROBLEMA Nº 226

Si: AP=PQ=QC; M es punto medio de $\overline{BC}$ y AM=10, calcule RS.



A) $\sqrt{3}$

B) 3

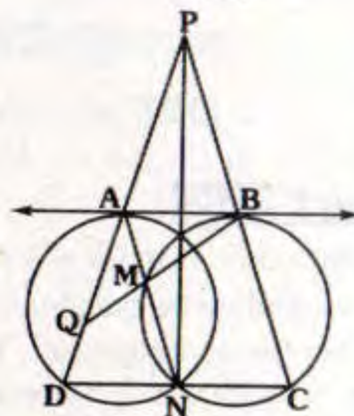
C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{2}$

E) 4

PROBLEMA Nº 227

En el gráfico A y B son puntos de tangencia. Si $\frac{AM}{MN}$=K, calcule $\frac{PA}{AQ}$.



A) K

B) K^2

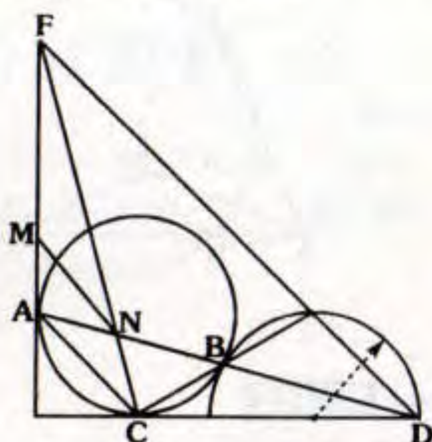
C) K^{-1}

D) $K^{-1/2}$

E) K^{-2}

PROBLEMA Nº 228

Del gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Calcule MN en función de a y b, si $\overline{MN}//\overline{AC}$, CA=a y FD=b.



A) $\frac{a(a+b)}{(a-b)}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{a+b}{2}$

D) $\frac{a^2}{b}$ E) $\frac{b^2+a^2}{(a+b)}$

PROBLEMA Nº 229

Se tiene un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$. En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ que intersecta a $\overline{BH}$ en P. En el triángulo AHB se traza la mediana $\overline{AN}$ cuya prolongación intersecta a $\overline{BC}$ en Q. Calcule el ángulo formado por $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$, $m\measuredangle C=36°$.

A) 54° B) 72° C) 108°

D) 48° E) 52°

PROBLEMA Nº 230

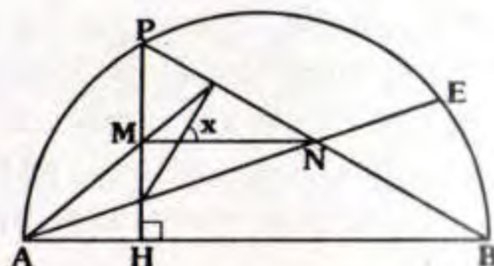
Se tiene un punto exterior A a una circunferencia trazándose las tangentes $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ (C y B: puntos de tangencia), luego también por A se traza una secante a la circunferencia cortando intersectándola primero en M y luego en N (M en $\overline{AN}$). Si NC=8 y NB=6, además la distancia de A a $\overline{BM}$ es igual a 3. Calcule la distancia de A a $\overline{CM}$.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 231

En la figura $\overline{AB}$ es diámetro, PM=MH, PN=NB. Si $m\widehat{PEB}=\theta$, calcule x.



A) θ B) $\theta/2$

C) $\frac{3}{2\theta}$ D) $90°-\frac{\theta}{2}$

E) $45°-\frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 232

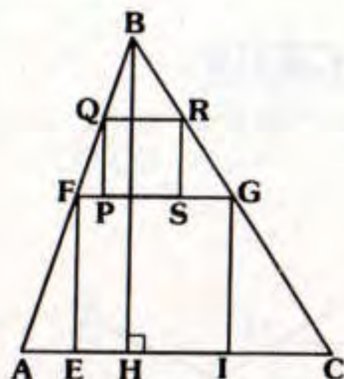
Se tienen los triángulos inscritos AB_1C y AB_2C en una misma circunferencia, la recta que une los ortocentros de estos triángulos corta a $\overline{AB_1}$ en M y $\overline{AB_2}$ en Q. Si $B_1M=3(MA)$ y MQ=1. Calcule la distancia entre los ortocentro.

A) 1 B) 4 C) 2

D) 2,5 E) 3

PROBLEMA Nº 233

Si EFGI y PQRS son cuadrados y AC=b y BH=a. Calcule PS.



A) $\dfrac{ab}{(2a+b)}$ B) $\dfrac{ab^2}{(2a-b)}$ C) $\dfrac{2ab}{(b-a)}$

D) $\dfrac{a^2b}{(a-b)^2}$ E) $\dfrac{a^2b}{(a+b)^2}$

PROBLEMA Nº 234

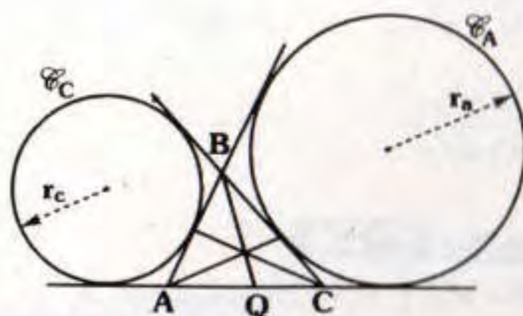
Se tiene un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia; P, Q, S y T son puntos de tangencia de la circunferencia con los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente $\overline{PS} \cap \overline{TQ} = \{M\}$ y $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{N\}$. Calcule MN, si el perímetro del cuadrilátero ABCD es igual a 2p.

A) $\dfrac{p}{4}$ B) $\dfrac{p}{2}$ C) p

D) $\dfrac{3p}{4}$ E) 0

PROBLEMA Nº 235

En el gráfico, $\mathscr{C}_A$ y $\mathscr{C}_C$ son las circunferencias exinscritas del triángulo ABC. Calcule AQ/QC.



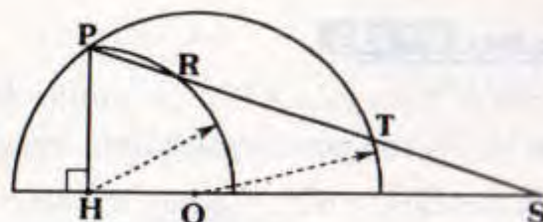
A) $\dfrac{r_c}{r_a}$ B) $\dfrac{r_a}{r_c}$

C) $\dfrac{r_a+r_c}{r_a}$ D) $\dfrac{r_a+r_c}{r_c}$

E) $\dfrac{r_a}{r_a+r_c}$

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, PR=RT, (HS)(OH)=36. Calcule HP.



A) $3\sqrt{2}$ B) 6 C) $6\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$ E) 9

PROBLEMA Nº 237

Se tiene el triángulo ABC, J es un punto interior, P está en $\overline{AB}$, Q en $\overline{BC}$ y R en $\overline{AC}$, tal que $\overline{PJ}//\overline{AC}$, $\overline{JQ}//\overline{AB}$, $\overline{JR} \cap \overline{BC}$ y JP=JQ=JR. Si AP=a, BQ=b y CR=c. Halle JP.

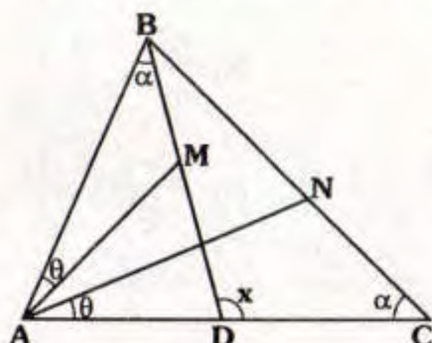
A) $\sqrt[3]{abc}$ B) $\dfrac{a+b+c}{3}$

C) $\sqrt{a^2+b^2+c}$ D) $\sqrt{ab+bc+ac}$

E) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$

PROBLEMA Nº 238

Si BM=MD y BN=NC. Calcule x.



A) $\alpha+\theta$ B) $2(\alpha+\theta)$

C) $180°-(\alpha+\theta)$ D) $90°-(\alpha+\theta)$

E) 90°

PROBLEMA Nº 239

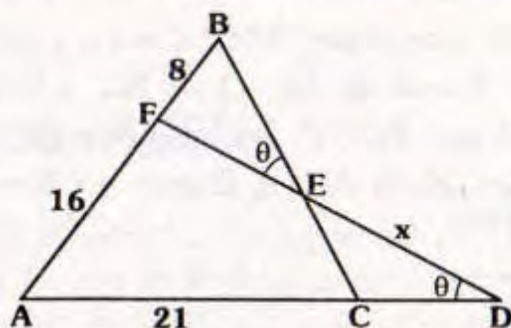
Se tiene el triángulo ABC, su punto de Fermat M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si m∢BAC = 60°. Calcule m∢MFN.

A) 120° B) 60° C) 90°

D) 75° E) 105°

PROBLEMA Nº 240

En el gráfico, calcule x.

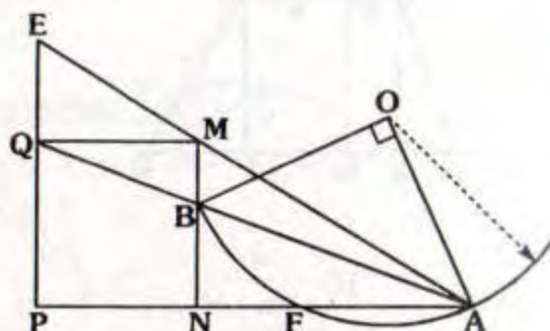


A) $\sqrt{65}$ B) $5\sqrt{7}$ C) $\sqrt{35}$

D) $\sqrt{55}$ E) $7\sqrt{35}$

PROBLEMA Nº 241

En el gráfico, MNPQ es un cuadrado. Si 2(AF)=3(FN). Calcule EQ/PQ.



A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

PROBLEMA Nº 242

Se tiene el triángulo ABC, P está en $\overline{AB}$, Q en $\overline{BC}$ y R en $\overline{AC}$ respectivamente. a, b y c son los radios de las circunferencias circunscrita a los triángulos APR, PBQ y QCR.

Si m∢ARP = m∢QPB = m∢RQC, calcule el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

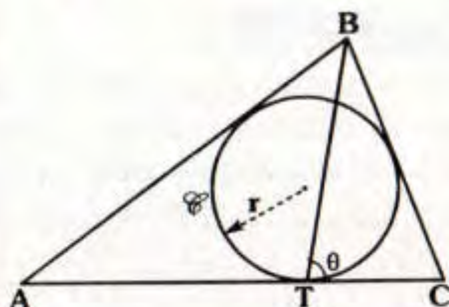
A) $\sqrt[2]{2abc}$ B) $\sqrt{ab+bc+ac}$

C) a+b+c D) $\sqrt{a^2+b^2+c}$

E) $\sqrt[3]{abc}$

PROBLEMA Nº 243

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el ΔABC, si AT=a, TC=b (a>b), calcule tgθ en función de a, b y r.



A) $\frac{a+r}{b+r}$ B) $\frac{2ab}{r(a-b)}$ C) $\frac{ab}{r(a-b)}$

D) $\frac{4ab}{r(a-b)}$ E) $\frac{2r(a-b)}{a+b}$

PROBLEMA Nº 244

Se tiene el rectángulo ABCD se ubica Q en $\overline{BC}$ y P en el interior del rectángulo tal que: m∢QAC = m∢DCP = θ y $\overline{DP} \perp \overline{AC}$. Calcule m∢QHD, si H∈ $\overline{AD}$ y $\overline{PH} // \overline{AC}$

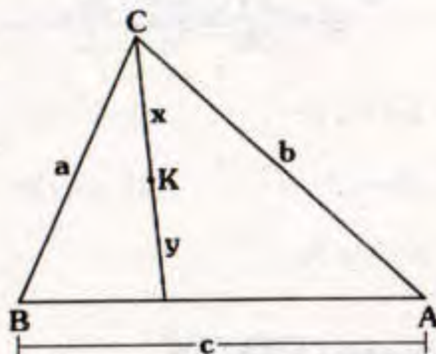
A) 90° − θ E) 45° − θ C) 45°

D) 60° E) 90°

PROBLEMA Nº 245

En el gráfico, K es el punto simediano del ΔABC, demuestre:

$\frac{x}{y}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$



PROBLEMA Nº 246

Sea el triángulo ABC, con AB=c, BC=a y AC=b. Si $a^2-c^2-bc=0$.

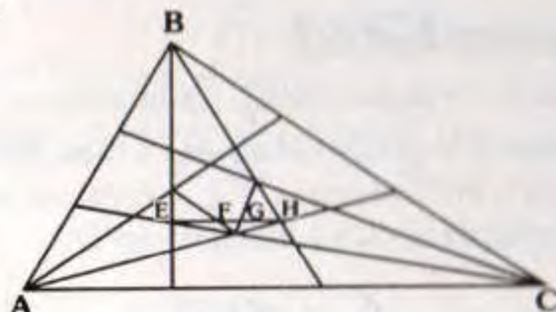
Calcule $\frac{m∢BAC}{m∢ACB}$.

A) 1 B) 2 C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 247

En el gráfico, los lados del triángulo ABC son trisecados, indique la relación correcta.



A) EF=2(FG)=GH B) $\frac{EF}{FG}=2\frac{EH}{GH}$

C) $\frac{EF}{1}=\frac{FG}{2}=\frac{FG}{4}$ D) $\frac{EF}{FG}=\frac{EH}{GH}$

E) EF=3(FG)=GH

PROBLEMA Nº 248

Dado el triángulo equilátero ABC, se ubica un punto interior que pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$ que dista 4u de $\overline{AB}$ y 2u de $\overline{BC}$. ¿Cuánto dista dicho punto de $\overline{AC}$?

A) 6u B) 7u C) 8u

D) $2\sqrt{2}$ u E) $2\sqrt{3}$ u

PROBLEMA Nº 249

En el triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BR}$ y las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ concu-

rrentes en D. Si $\overline{PR} \cap \overline{CD} = \{M\}$, $\overline{QR} \cap \overline{AD} = \{N\}$, RM=4u, MP=5u y RN=3u. Calcule BD/DR.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

PROBLEMA Nº 250

Dado un triángulo ABC, las bisectrices interiores $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ (M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{AB}$). El rayo MN interseca a la circunferencia circunscrita a dicho triángulo en D.

Si $\frac{x}{BD} = \frac{y}{AD} + \frac{z}{CD}$, halle $\frac{x}{y+z}$.

A) 2 B) 1/2 C) 1

D) 3 E) 1/3

PROBLEMA Nº 251

Se tiene el paralelogramo ABCD (AB>BC), se ubica G en el lado AB, se traza la circunferencia que pasa por A y G la cual es tangente a la prolongación de $\overline{CB}$ en P. La prolongación de DG corta a dicha circunferencia en H, si el cuadrilátero GHBC es inscriptible, demostrar que CP=AB.

PROBLEMA Nº 252

Sea el triángulo ABC y las cevianas interiores concurrentes en P, AL, BE y CF, sea $\overline{FE} \cap \overline{AP} = \{D\}$, sea K la proyección ortogonal de D sobre $\overline{BC}$ respectivamente. Probar que $m\sphericalangle DKF = m\sphericalangle DKE$.

PROBLEMA Nº 253

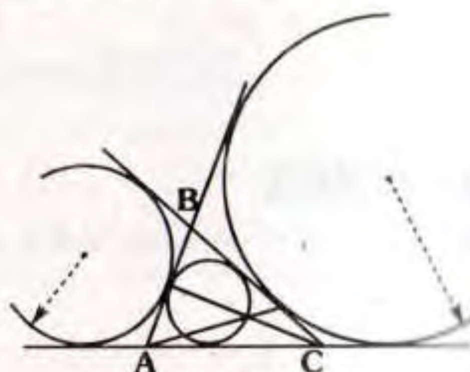
Se tiene un paralelogramo ABCD, se ubica H en la prolongación de AB tal que BC=BH, en el triángulo BDC se traza la altura CF, luego en la prolongación de FC se ubica P, tal que $m\sphericalangle BHP = 90°$. Demostrar que el rayo AP es bisectriz del ángulo BAD.

PROBLEMA Nº 254

Dado un triángulo ABC se trazan exteriormente los rectángulos semejantes ABDE y BCGH (tomar en cuenta el orden de los vértices). Demuestre que la mediatriz de $\overline{AC}$ corta a $\overline{EG}$ en el punto medio.

PROBLEMA Nº 255

En el gráfico, AB=c, BC=a y AC=b. Indique la relación entre a, b y c.



A) a+b=2c B) $a^2+b^2=2c^2$

C) $ab=c^2$ D) $ab=2c^2$

E) a+b=3c

PROBLEMA Nº 256

Calcule la medida de un ángulo del triángulo acutángulo, sabiendo que una bisectriz interior mide 5u y que las alturas trazadas desde los otros vértices miden 4u y 12u.

A) 58° B) 74° C) 37°

D) 60° E) 67°

PROBLEMA Nº 257

En un cuadrilátero convexo ABCD las diagonales se cortan en P, de modo que

$\frac{AB}{2}=\frac{BC}{8}=\frac{CD}{6}=\frac{AD}{3}=\frac{BD}{4}$, si $AP=3$.

Calcule PC.

A) 6 B) 7 C) 8

D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, $AB=BC$, $AP=PQ=QC$ y $m\widehat{AM}=m\widehat{MN}=m\widehat{NC}=\theta$. Calcule $m\measuredangle ABC$.



A) $90°-\theta$

B) θ

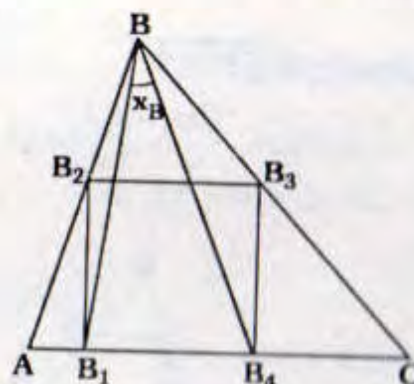
C) 2θ

D) $\frac{3\theta}{2}$

E) $\frac{2\theta}{3}$

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, $B_1B_2B_3B_4$ es un cuadrado y se define $x_B(m\measuredangle B_1BB_4)$, análogamente se define x_A y x_C. Calcule $x_A+x_B+x_C$.



A) 45°

B) 135°

C) 90°

D) 60°

E) 75°

PROBLEMA Nº 260

Se tiene el paralelogramo ABCD, $AB=3$, $AD=5$ y $m\measuredangle BAD=60°$. $\mathscr{C}_1$ es una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, $\mathscr{C}_2$ es una circunferencia tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes en T. Halle la longitud del lugar geométrico de T.

A) 7π B) $\frac{7}{2}\pi$ C) 5π

D) 6 E) 7



PROBLEMA Nº 261

En el gráfico, $\frac{CH}{5}=\frac{HQ}{2}$=QB, AE=14 y FC=25. Calcule EF.

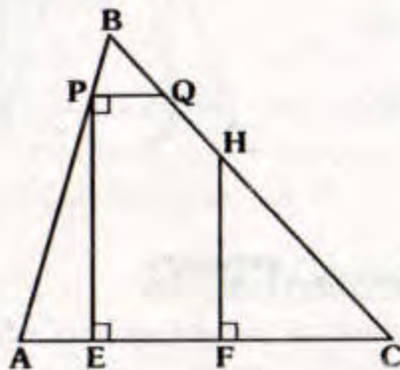
A) 13

B) 13,5

C) 15

D) 16

E) 17



PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, QC=3(BQ)=3(AB) y AP=PQ=4. Calcule PC.

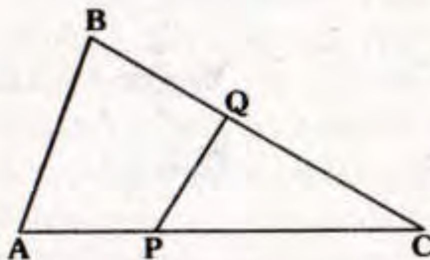
A) 8

B) 10

C) 12

D) 15

E) 16



PROBLEMA Nº 263

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD. Tal que m∢ACB=2(m∢ABD), AB=6, BD=5 y AD=2. Calcule el perímetro de la región triángular BCD.

A) 13 B) 16 C) 19
D) 21 E) 23

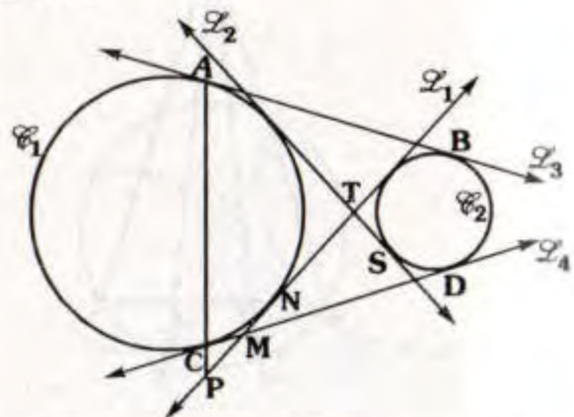
PROBLEMA Nº 264

Se tiene el triángulo ABC (recto en B), P y Q trisecan a $\overline{AC}$ (Q en $\overline{PC}$). Si G es baricentro del triángulo PBQ, calcule m∢PGQ.

A) 60° B) 45° C) 135°
D) 90° E) 105°

PROBLEMA Nº 265

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$, son rectas tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Si NT=3(MN)=3 y TS=2. Calcule PM



A) $\frac{27}{13}$ B) $\frac{14}{13}$ C) $\frac{7}{5}$
D) $\frac{13}{27}$ E) $\frac{24}{7}$

PROBLEMA Nº 266

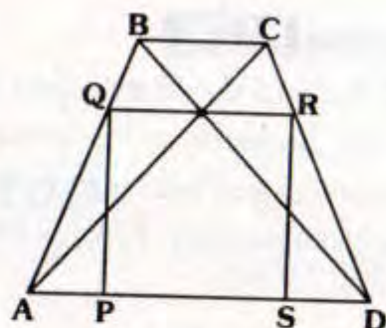
En el triángulo ABC, por su incentro se traza la paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{AC}$ en N. Si AB+AC=12 y MN=4, calcule BC.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 267

En el gráfico, $\overline{AD}//\overline{BC}$ y PQRS es un cuadrado. Si BC=a, calcule la longitud de la altura del trapecio.

A) $a\sqrt{2}$
B) $a\sqrt{3}$
C) $\frac{3}{2}a$
D) 2a
E) 3a



RESOLUCIÓN Nº 268

En un trapecio ABCD ($\overline{AB}//\overline{CD}$) se ubican en $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ los puntos P y Q respectivamente, tal: $\overline{PQ}//\overline{AB}$ y $\overline{PB}//\overline{DQ}$. Calcule PQ, si: (AB)(DC)=324

A) 9 B) 18 C) 27
D) $18\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{3}$

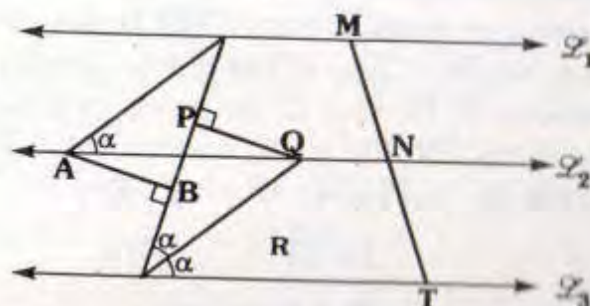
PROBLEMA Nº 269

La mediatriz del lado AC de un triángulo ABC interseca a la circunferencia circunscrita en P. Calcule AQ, si $\overline{AP} \cap \overline{BC} = \{Q\}$, AB=5(BQ) y PQ=3.

A) 6 B) 8 C) 16
D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 270

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ 6(AB)=5(PQ) y MN=7. Calcule NT.



A) 4,8 B) 4,2 C) 2,4
D) 8,4 E) 8,6

PROBLEMA Nº 271

En los lados BC y CD de un rectángulo ABCD, se ubican P y Q respectivamente, tal que: PB=2(PC) y 5(QD)=3(CQ). Calcule OH, si $\overline{AP} \cap \overline{BQ} = \{O\}$, $\overline{OH} \perp \overline{QC}$ y AD=85.

A) 35 B) 45 C) 40
D) 55 E) 65

PROBLEMA Nº 272

En el triángulo ABC, se traza la mediatriz de $\overline{AB}$, que corta a $\overline{AC}$ en N y a la prolongación de $\overline{BC}$ en T. Si CB=3(TC) y AN=8. Calcule NC

A) 1,5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 3,5

PROBLEMA Nº 273

En un triángulo ABC se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}$ (P en la prolongación de $\overline{AC}$). Si las alturas relativas a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 3 cm y 6 cm respectivamente y BP=10cm. Calcule m∢PBC

A) 37° B) 60° C) 75°
D) 53° E) 45°

PROBLEMA Nº 274

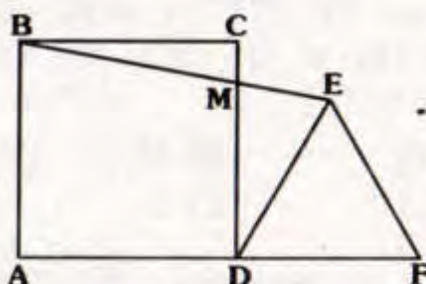
Se tiene un paralelogramo ABCD. En los lados AB, BC, CD y AD se ubican respectivamente F, M, N y E; de modo que los segmentos FN, ME y AC concurren en P. Calcule EF; si PM=4, PE=6 y MN=8.

A) 9 B) 10 C) 8
D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico, se muestra al cuadrado ABCD y al triángulo equilátero DEF. Si ME=10 y AD=DF. Calcule BM.

A) 25
B) 18
C) 24
D) 10
E) 20



PROBLEMA Nº 276

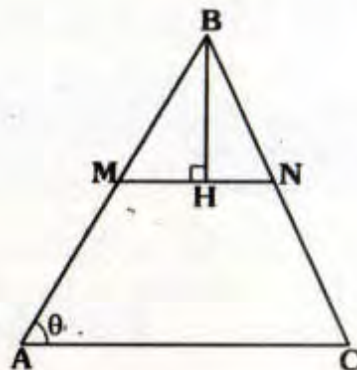
En un trapecio ABCD; $\overline{BC}//\overline{AD}$ se ubica el punto medio M de $\overline{CD}$; se traza $\overline{MH}\perp\overline{AD}$ tal que BA=BM; $\overline{MB}\perp\overline{AB}$; $m\measuredangle MBC=26,5$. Calcule la medida del ángulo formado por $\overline{AM}$ y $\overline{BH}$.

A) 62,5° B) 63,5° C) 64,5°
D) 65,5° E) 66,5°

PROBLEMA Nº 277

Según el gráfico, calcule el valor de θ"; si AC=3(MN), AM=10, BH=4 y $\overline{MN}//\overline{AC}$

A) 30°
B) 60°
C) 45°
D) 37°
E) 53°



PROBLEMA Nº 278

Por el incentro de un triángulo ABC se traza rectas paralelas a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ que intersecan al lado $\overline{AC}$ en los puntos P y Q respectivamente. Calcule PQ, si AB=5, BC=7 y AC=6.

A) 2 B) 1 C) 3
D) 1,5 E) 2,5

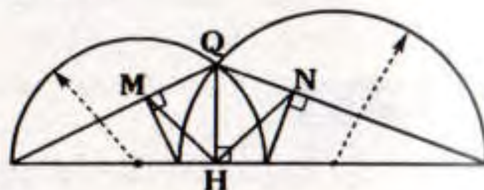
PROBLEMA Nº 279

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B, en $\overline{BC}$ se ubica el punto H y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, tal que HPQC es un cuadrado, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$.

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 53° E) 30°

PROBLEMA Nº 280

En el gráfico, HM=a y HN=b.
Calcule QH.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{2ab}$ C) $2\sqrt{ab}$

D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA Nº 281

Se tiene el triángulo ABC, exteriormente se trazan los cuadrados ABMN y BCQR. Si $MC=2\sqrt{2}$, calcule NQ.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4

D) $4\sqrt{2}$ E) 6

PROBLEMA Nº 282

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y AB=2(AQ). Calcule x.

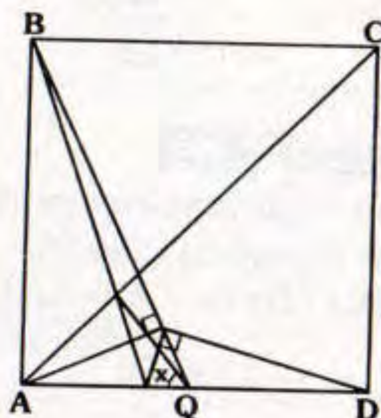
A) 37°

B) 67,5°

C) 22,5°

D) 45°

E) 53°



PROBLEMA Nº 283

En un triángulo ABC: AB=8u y BC=6u. Se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}$, siendo M punto medio de $\overline{BP}$ y $\overline{AM} \cap \overline{BC} = \{N\}$, calcule BN.

A) 2,4u B) 2,8u C) 3,6u

D) 2,18u E) 4,8u

PROBLEMA Nº 284

En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AD}$. En $\overline{BD}$ se ubica el punto M por el cual se traza una paralela a $\overline{AD}$ que intersecta a $\overline{AB}$ en P y la prolongación de $\overline{CA}$ en Q. Calcule AD, si MP=2u y PQ=3u.

A) 2,4u B) 2,8u C) 3,0u

D) 3,2u E) 3,5u

PROBLEMA Nº 285

En un triángulo ABC la ceviana BD y la mediana BE trisecan al ángulo ABC, (D en $\overline{AE}$) y AD=2DE, calcule m∢DBE.

A) 30° B) 22,5° C) 45°

D) 18,5° E) 26,5°

PROBLEMA Nº 286

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, la ceviana BE interseca a la bisectriz interior AD en su punto medio M. Si 12(AB)=5(AC), hallar la razón entre BE y AD.

A) $\frac{13}{17}$ B) $\frac{15}{19}$ C) $\frac{17}{22}$

D) $\frac{19}{23}$ E) $\frac{21}{26}$

PROBLEMA Nº 287

Sean ABCD y PQRD rectángulos. Si MR=3(QM) y BH=6, calcule HA.

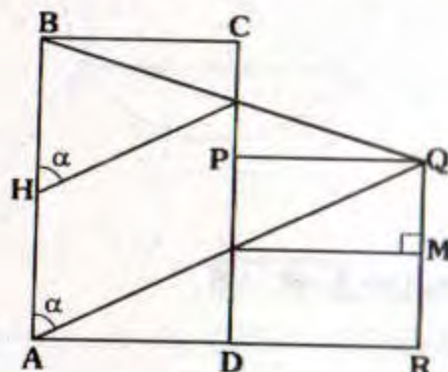
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 4,5



PROBLEMA Nº 288

En un triángulo ABC la bisectriz interior AP, la mediana BR y la ceviana CQ concurren en D. Si 3(BQ)=4(PQ), calcule la razón entre AD y DP.

A) 3/4 B) 7/3 C) 7/4

D) 9/5 E) 8/3

PROBLEMA Nº 289

En un cuadrado ABCD se ubican los puntos E y F, ambos en $\overline{AD}$, tal que AE=3u, EF=2u y FD=1u. Calcule la longitud del segmento determinado en $\overline{AC}$ por $\overline{BE}$ y $\overline{BF}$.

A) $\frac{6\sqrt{2}}{13}$u B) $\frac{8\sqrt{2}}{15}$u C) $\frac{8\sqrt{2}}{11}$u

D) $\sqrt{2}$ u E) $\frac{8\sqrt{5}}{13}$u

PROBLEMA Nº 290

En el gráfico mostrado, T es punto de tangencia y $\overline{TQ}//\overline{AB}$. Si TP=3(PB)=3, calcule PQ.

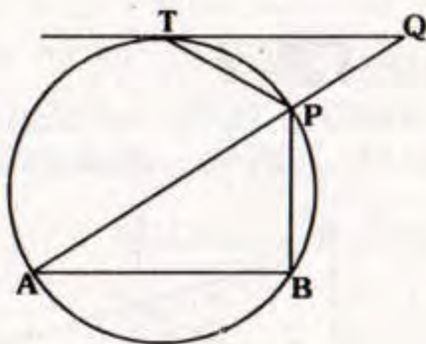
A) 4

B) 5

C) 9

D) 12

E) 13



PROBLEMA Nº 291

En el gráfico, r_1(BC)=K , calcule r_2(AB).

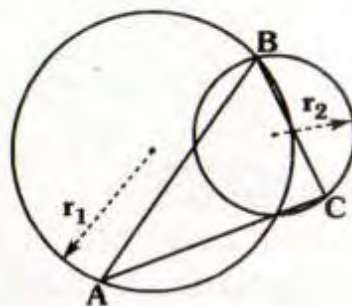
A) K

B) $K\sqrt{2}$

C) 2K

D) K/2

E) $\frac{K\sqrt{2}}{2}$



PROBLEMA Nº 292

En la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubican los puntos P y Q, tal que el triángulo PBQ es equilátero. Calcule PQ, si AP=5u y QC=6u.

A) 6u B) 12u C) 8u

D) 4u E) 15u

PROBLEMA Nº 293

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se insccribe el cuadrilátero ABCD, tal que BC=CD=2u y AD=8u. Calcule AB.

A) 6u B) 7u C) 8u

D) 4u E) 5u

PROBLEMA Nº 294

En el triángulo ABC las cevianas interiores $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ y $\overline{BR}$ concurren en M. Si AM=MQ y RC=2(AR); calcule MP/MC.

A) 1/2 B) 2 C) 1/3

D) 2/3 E) 3/4

PROBLEMA Nº 295

De la figura, TDL es un triángulo equilátero, AD=2 y TL=3. Calcule AS. (T es punto

de tangencia).

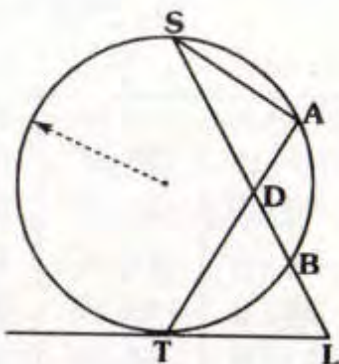
A) $\sqrt{5}$

B) $\sqrt{15}$

C) $\sqrt{10}$

D) $\sqrt{7}$

E) 3



PROBLEMA Nº 296

En el gráfico, B es punto de tangencia, si $\overline{MN}//\overline{AB}$ y 3(PQ)=2(BQ). Calcule MN/AB.

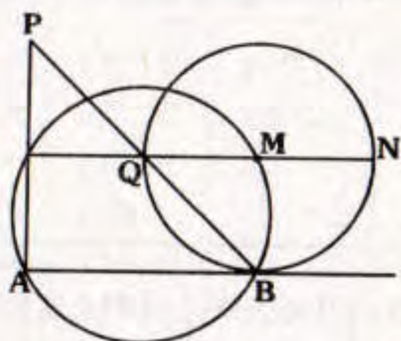
A) 2/5

B) 1/5

C) 3/5

D) 4/5

E) 3/10



PROBLEMA Nº 297

Por el incentro de un triángulo ABC se traza la recta $\mathscr{L}$, que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que las distancias de A y C hacia $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ son 2 y 8 respectivamente. Si $\frac{AB}{5}=\frac{BC}{6}=\frac{BC}{7}$, calcule la distancia de B hacia $\mathscr{L}$.

A) $\frac{55}{7}$ B) 7 C) $\frac{52}{7}$

D) $\frac{33}{7}$ E) 6

PROBLEMA Nº 298

Según el gráfico, AD=16; BQ=8 y CD=9. Calcule CP

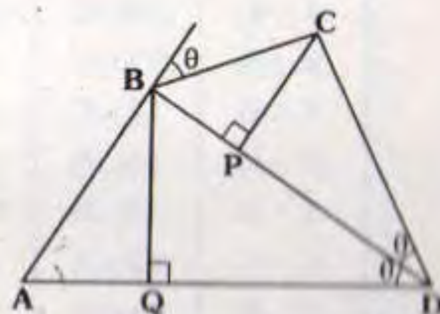
A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 4,5



PROBLEMA Nº 299

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BL, Q está en $\overline{BL}$, si 3(BC)=2(AB), AQ=9, BQ=6 y QC=4. Calcule AL/LC.

A) 3/2 B) 9/4 C) 4/9

D) 5/3 E) 4

PROBLEMA Nº 300

ABCD y DEFH son rectángulos semejantes AB=9, AD=5 y DO=7. Los puntos O,E y B son colineales, lo mismo que O, F y C. Entonces DE+EF+OB+OE, es:

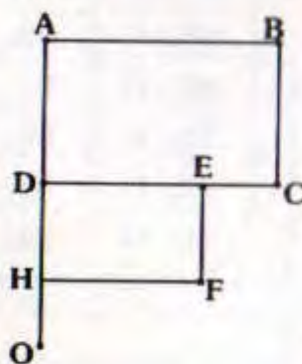
A) 29

B) 31

C) 40

D) 31,9

E) 29,9





CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. D	10. C	19. D	28. C	37. A	46. A	55. C
2. A	11. C	20. C	29. C	38. D	47. C	56. E
3. B	12. C	21. C	30. A	39. A	48. C	57. A
4. B	13. A	22. D	31. E	40. B	49. B	58. B
5. D	14. B	23. B	32. B	41. A	50. C	59. B
6. C	15. A	24. A	33. D	42. B	51. C	60. D
7. B	16. A	25. D	34. A	43. D	52. B	
8. E	17. C	26. C	35. D	44. A	53. D	
9. D	18. A	27. E	36. E	45. A	54. C	

CEPRE-UNI

61. C	73. C	85. B	97. D	109. D	121. B	133. C
62. D	74. B	86. D	98. C	110. A	122. C	134. B
63. B	75. C	87. D	99. C	111. C	123. B	135. C
64. D	76. B	88. C	100. C	112. *	124. D	136. D
65 B	77. B	89. D	101. D	113. C	125. D	137. B
66. B	78. D	90. B	102. B	114. *	126. E	138. B
67. B	79. C	91. D	103. E	115. B	127. E	139. D
68. C	80. B	92. A	104. C	116. E	128. D	140. C
69. E	81. B	93. C	105. E	117. D	129. B	
70. E	82. C	94. A	106. B	118. C	130. D	
71. D	83. C	95. D	107. C	119. E	131. B	
72. D	84. E	96. D	108. E	120. A	132. C	

(*) Problemas demostrativos

SEMESTRAL

141. D	150. A	159. B	168. C	177. B	186. E	195. C
142. B	151. A	160. D	169. D	178. D	187. C	196. B
143. C	152. B	161. B	170. B	179. E	188. B	197. B
144. D	153. A	162. D	171. C	180. B	189. D	198. C
145. B	154. D	163. B	172. B	181. A	190. C	199. C
146. C	155. D	164. C	173. E	182. A	191. C	200. A
147. D	156. A	165. D	174. B	183. D	192. C	
148. D	157. B	166. E	175. D	184. B	193. D	
149. B	158. D	167. C	176. D	185. D	194. B	

SEMESTRAL INTENSIVO

201. E	210. B	219. E	228. B	237. A	246. B	255. E
202. A	211. C	220. B	229. A	238. E	247. A	256. B
203. *	212. B	221. *	230. A	239. A	248. C	257. E
204. A	213. C	222. B	231. B	240. B	249. E	258. B
205. A	214. C	223. D	232. B	241. B	250. B	259. C
206. B	215. A	224. C	233. E	242. E	251. *	260. E
207. D	216. E	225. B	234. E	243. B	252. *	
208. B	217. B	226. B	235. B	244. E	253. *	
209. B	218. E	227. A	236. B	245. *	254. *	

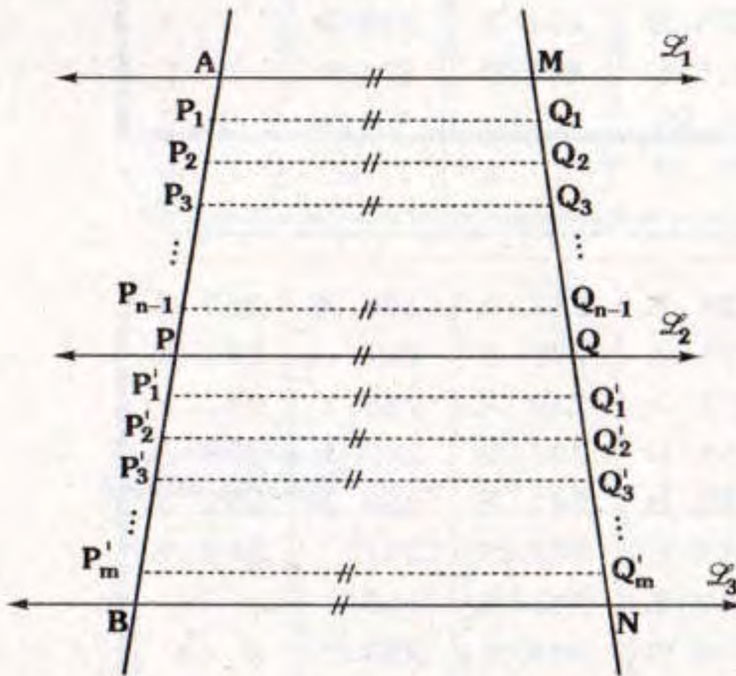
REPASO

261. E	267. D	273. A	279. A	285. C	291. A	297. A
262. E	268. B	274. D	280. A	286. C	292. B	298. C
263. D	269. D	275. E	281. C	287. B	293. B	299. B
264. D	270. D	276. B	282. D	288. C	294. C	300. D
265. C	271. B	277. E	283. E	289. C	295. C	
266. A	272. B	278. A	284. E	290. C	296. C	

(*) Problemas demostrativos

ANEXOS

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE TALES



Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$

$$\frac{AP}{PB} = x$$

$x \in I$ (*Irracional*)

Vamos a demostrar:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{MQ}{QN}$$

- En las páginas 8 y 9 demostramos el teorema en el caso en que "x" era racional, con la misma idea daremos la prueba en general.
- Ubicamos en $\overline{AP}$, los puntos P_1, P_2, P_3, ... P_{n-1} tal que:

$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = ... P_{n-1}P = \frac{AP}{n} = \mathscr{E}$$

- Sea "m" el cociente y "r" el resto de dividir PB por $\mathscr{E}$, ubicamos P'_1, P'_2, P'_3, ... P'_m en $\overline{PB}$, tal que

$$PP'_1 = P'_1P'_2 = P'_2P'_3 = ... = P'_{m-1}P'_m = \mathscr{E} \quad y \quad P'_mB = r < \mathscr{E}$$

- Se trazan las paralelas por P_1, P_2, P_3, ... P_{n-1}, P'_1, P'_2, ..., P'_m las cuales cortan a $\overline{MN}$ en Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_{n-1}, Q'_1, Q'_2 ..., Q'_m respectivamente.

- Por teorema (de las equiparalelas):

$$MQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = ... = Q_{n-1}Q = \mathscr{E}'$$

$$QQ'_1 = Q'_1Q'_2 = Q'_2Q'_3 = ...Q'_{m-1}Q'_m = \mathscr{E}'$$

$$Q'_mN = r' < \mathscr{E}$$

- Luego tenemos: $AP = n\mathscr{E}$; $PB = m\mathscr{E} + r$

$MQ = n\mathscr{E}'$; $QN = m\mathscr{E}' + r'$

$$\Rightarrow \left|\frac{PB}{AP} - \frac{QN}{MQ}\right| = \left|\frac{r}{\mathscr{E}} - \frac{r'}{\mathscr{E}'}\right| = \left|\frac{r}{AP} - \frac{r'}{MQ}\right|$$

- Como $\frac{r}{AP} < \frac{1}{n}$ y $\frac{r'}{MQ} < \frac{1}{n}$

También: $$\underbrace{\left|\frac{PB}{AB} - \frac{QN}{MQ}\right|}_{\text{No depende de "n"}} = \left|\frac{r}{AP} - \frac{r'}{MQ}\right| < \frac{r}{AP} + \frac{r'}{MQ} < \frac{2}{n}$$

- Para que $\left|\frac{PB}{AB} - \frac{QN}{MQ}\right|$ sea menor que $\frac{2}{n}$ para todo entero positivo, debe ser cero por lo tanto: $\frac{PB}{AP} = \frac{QN}{MQ}$ como queríamos demostrar.

SEMEJANZA DE DOS FIGURAS

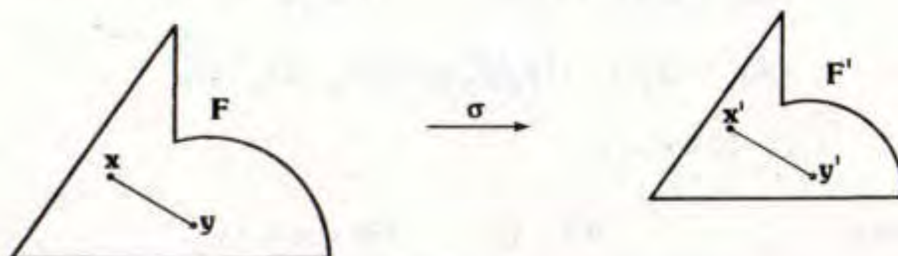
Sean F y F' dos figuras del plano o del espacio y "r" un número real positivo.

Se dice que F y F' son semejantes, con razón de semejanza "r", cuando existe una correspondencia biyectiva $\sigma : F \to F'$, entre los puntos de F y los punto de F', con la siguiente propiedad.

> Si X e Y son puntos arbitrarios de F y $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ son sus correspondientes en F' entonces: $X'Y' = r(XY)$.

La correspondencia biyectiva de $\sigma : F \to F'$, con esta propiedad de multiplicar las distancias por el factor constante "r", se llama semejanza de razón "r" entre F y F'. Si $X' = \sigma(X)$, se dice que los puntos X y X' son homólogos.

Evidentemente, toda figura es semejante así misma, porque la función identidad $\sigma : F \to F'$ es una semejanza de razón 1.

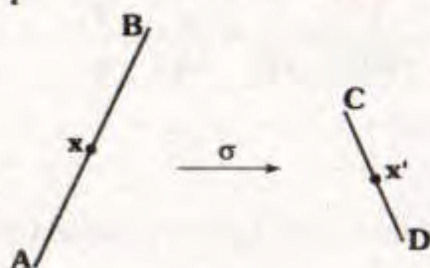


También, si F es semejante a F', entonces F' es semejante a F, porque dada la semejanza $\sigma : F \to F'$ de razón r, la función inversa $\sigma^{-1} : F' \to F$ es una semejanza de razón $\frac{1}{r}$.

Se tiene también la transitividad:

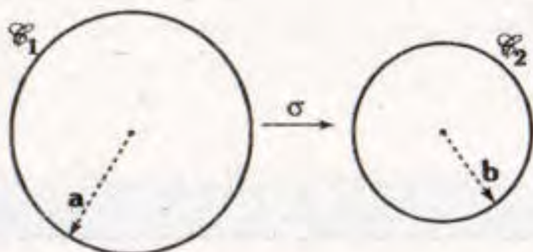
$$F_1 \sim F_2 \wedge F_2 \sim F_3 \;\to\; F_1 \sim F_3$$

Con la definición dada, es fácil probar lo siguiente:



Dos segmentos son semejantes, con razón : $\frac{AB}{CD}$

Notación : $\overline{AB} \sim \overline{CD}$

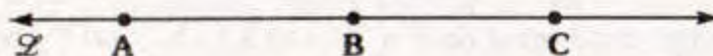


Dos circunferencias son semejantes, con razón : $\frac{a}{b}$

Notación : $\mathscr{C}_1 \sim \mathscr{C}_2$

SEGMENTOS DIRIGIDOS

A un segmento además de su longitud se le asocia la noción de signo.



En la recta $\mathscr{L}$ se ubican los puntos A, B y C, vamos a asociar la idea de dirección, si vamos de A hacia B, tenemos el segmento dirigido $\overline{AB}$ y si vamos de B hacia A, tenemos el segmento dirigido BA, se cumple que $|AB| = |BA|$, sus magnitudes son iguales pero direcciones contrarias: $AB = -BA$.

En el nivel pre-universitario por fines prácticos no usamos los segmentos dirigidos, pero en nivel universitario, veremos la importancia de dichos conceptos.

IMPORTANTE

- *También*: $AB+BA=0$
- *En el gráfico, se cumple*: $AB+BC+CA=0$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

Veamos la importancia del concepto de segmento dirigido:



$\dfrac{AP}{PB}>0$ ... P está entre A y B $(P \neq A \text{ y } P \neq B)$

$\dfrac{AQ}{QB}<0$ ... Q está en la prolongación de $\overline{AB}$ o de $\overline{BA}$.

Ahora queda claro que si: $\dfrac{AP_1}{P_1B}=\dfrac{AP_2}{P_2B} \Rightarrow P_1=P_2$

- La división armónica debe expresarse así: $\dfrac{AP}{PB}=-\dfrac{AQ}{QB}$
- Pues P divide internamente a $\overline{AB}$ y Q divide externamente.

